⑩ STRUTTURA DEL SISTEMA DEI NUMERI REALI

Possiamo dire che il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$ include l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, che a sua volta include gli interi $\mathbb{Z}$ di cui i naturali $\mathbb{N}$ non sono altro che un sottoinsieme. Possiamo quindi scrivere che:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Enunciamo ora due lemmi che sono indispensabili a dimostrare la verità del teorema che è segue:

LEMMA 1: Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un numero intero n tale che $n > x$.

Una conseguenza di questo lemma è che l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi non è superiormente limitato e quindi, che non esiste alcun estremo superiore di $\mathbb{Z}$

LEMMA 2: Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un numero intero n tale che:

$$n \leq x < n+1 \qquad n = [x]$$

Tale numero viene detto parte intera di x ed è il massimo degli interi che non superano x.

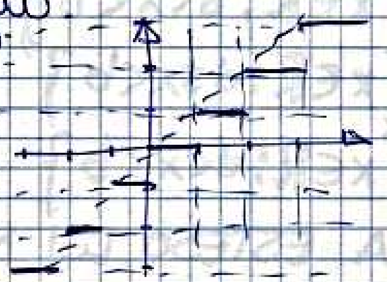
FUNZIONE PARTE INTERA

Poiché abbiamo visto esiste per $\forall x \in \mathbb{R}$ un numero intero $m > |x|$, da cui $-m < x < m$, definiamo l'insieme $A = \{r \in \mathbb{Z} : -m < r < m\}$ dato che gli interi compresi fra $-m$ ed m sono un numero finito, quindi A sarà dotato di massimo.

Il massimo di A sarà, appunto, la parte intera di x.

$$[x] = \max A$$

$$[x] \leq x < [x] + 1$$



TEOREMA 1 (per l'approssimazione di un numero reale con un numero razionale)

Per ogni numero reale x scelta un'approssimazione ε con $\varepsilon > 0$, esiste un numero razionale r tale che $r \leq x < r + \varepsilon$

$$\forall x, \varepsilon \in \mathbb{R} \; \exists r \in \mathbb{Q} : r \leq x < r + \varepsilon$$

TEOREMA 2 Fra due numeri reali a e b esiste sempre un numero razionale

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \; \exists r \in \mathbb{Q} : a < r \leq b$$

COROLLARIO 1: $x \in \mathbb{R} : \forall m \in \mathbb{N}, |x| \leq \frac{1}{m} \Rightarrow x = 0$

RADICI ENNESIME DEI NUMERI REALI POSITIVI

Si definisce radice n-ma di x quel numero y che elevato alla potenza n-ma è uguale a x. Solo i numeri reali non negativi sono dotati di radice n-ma in $\mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{x} = y : y^n = x$$

TEOREMA: Ogni numero positivo ha un'unica radice n-ma positiva ($n \in \mathbb{N}$).

Può capitare che per $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{Q}$ ma le radici n-me dei numeri reali sono per ogni numeri reali ~~reali~~ razionali.

È dimostrato, ad esempio, che $\nexists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$