PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

Una proposizione p_n che dipende dal numero naturale n ed risulta vera per $n=1$ e per $n+1$ qualora sia supposta vera per n, è vera per ogni valore di $n \in \mathbb{N}$.

P_n vera per ipotesi

Se p_{n+1} è vera e p_1 è vera $\Rightarrow$ P_n è vera per $\forall n \in \mathbb{N}$

INSIEMI EQUIPOTENTI

Due insiemi si dicono equipotenti (hanno cioè ed stessa potenza) se è possibile definire una corrispondenza biunivoca di A in B.

Se A è equipotente a B si scrive **$A \sim B$**

Valgono le proprietà

1) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
2) $A \sim A$
3) $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

INSIEMI INFINITI

Un insieme è infinito se e solo se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

INSIEMI NUMERABILI

Un insieme si dice numerabile se è equipotente all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Possiamo quindi scrivere gli elementi a di un insieme numerabile A come $a_1, a_2, \dots, a_n$

definendo cioè una corrispondenza biunivoca fra l'elemento di indice n ed il numero naturale $n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 14.1 ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è finito o al più numerabile.

TEOREMA 14.2 unione di una quantità finita o al più numerabile di insiemi finiti o numerabili è finita o al più numerabile.

Se infatti avessimo una quantità numerabile di insiemi numerabili

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots\}$$
$$\dots$$
$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nn}, \dots\}$$

Potremo scrivere l'insieme unione come

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{41} \dots\}$$

Se vogliamo spiegare il criterio con cui abbiamo ordinato gli elementi a_{pq} di A dobbiamo introdurre il concetto di **altezza di $(p,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.** In A abbiamo corrispondenza biunivoca fra gli elementi a_{pq} e le coppie ordinate $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Si dice altezza della coppia (p,q) il numero naturale $p+q$.

Osserviamo quindi che le coppie che hanno altezza uguale ad n sono in numero finito, esattamente $n-1$:

$(1, n-1)(2, n-2), \dots, (n-1, 1)$