Dalla definizione di altezza della coppia (p,q) possiamo enunciare il

TEOREMA 14.5 L'insieme $\mathbb{Q}$ di tutti i numeri razionali è numerabile.

Possiamo infatti scrivere

$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{p}{q}, \text{ con } p,q \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ e $\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{p}{q}, \text{ con } p,q \in \mathbb{N}\right\}$

Essendo $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ dove $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Q}^-$ sono insiemi numerabili, ecco che per il teorema 14.2 $\mathbb{Q}$ è numerabile.

POTENZA DEL CONTINUO

Un insieme equipotente all'insieme dei punti di una retta ha la potenza del continuo.

TEOREMA 16.2 L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile ed ha la potenza del continuo.

FATTORIALE DI n

In un insieme finito A possiamo indicare gli elementi nel modo seguente

$$a_1, a_2, \dots a_n.$$

L'insieme A è totalmente ordinato rispetto alla relazione d'ordine

$$a_i < a_j \quad \text{se } i < j$$

Viene detta permutazione fondamentale l'insieme A con l'ordinamento detto sopra.

Il numero di permutazioni di n elementi vale P_n ed è uguale a $P_n = n \cdot (n-1)(n-2) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

DEFINIZIONE

Si definisce n fattoriale o fattoriale di n e si indica con $n!$ il prodotto dei primi n numeri naturali.

Abbiamo che $n! = n \cdot (n-1)!$ mentre $0! := 1$

Il numero dei sottoinsiemi totalmente ordinati di k elementi di un insieme di n elementi vale

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

COEFFICIENTE BINOMIALE

Il numero dei sottoinsiemi di k elementi contenuti in un insieme di n elementi $(n \geq k)$ vale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ e prende il nome di coefficiente binomiale.

PROPRIETÀ DEL COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Tale numero prende il nome di coefficiente binomiale ed infatti è fondamentale nella cosiddetta formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$