I NUMERI COMPLESSI

Non è difficile rendersi conto che in $\mathbb{R}$ non sono possibili alcune operazioni, come ad esempio le radici di indice pari di un numero negativo. Introduciamo così un nuovo insieme di numeri che estende $\mathbb{R}$ e nel quale tali operazioni sono possibili. Si tratta dell'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Vediamo ora che $\mathbb{C}$ costituisce un campo.

IL CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$

Si chiamano numeri complessi le coppie ordinate di numeri reali $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, con le seguenti proprietà: || DEF

0) L'addizione di due numeri complessi (a,b) (c,d) è così definita

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

0) il prodotto è così definito

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

1) addizione e moltiplicazione godono della proprietà commutativa

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$$

2) della proprietà associativa

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$
$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$$

3) e della proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:

$$[(e,f)+(c,d)]\cdot(a,b)=[(a,b)(c,d)]+[(a,b)\cdot(e,f)]$$

4) esistenza degli elementi neutri:

per la somma $(0,0)+(a,b)=(a,b)+(0,0)=(a,b)$

e per il prodotto $(a,b)\cdot(1,0)=(1,0)\cdot(a,b)=(a,b)$

5) esistenza dell'elemento opposto

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C}\ \exists(-a,-b)\in\mathbb{C}:(a,b)+(-a,-b)=(-a,-b)+(a,b)=0$$

e dell'elemento inverso

$$\forall(a,b)\in\mathbb{C}\neq(0,0)\ \exists\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{b}{a^2+b^2}\right):(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Possiamo quindi affermare che l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto all'addizione e alla moltiplicazione sopra introdotte.

L'UNITÀ IMMAGINARIA i

I numeri complessi della forma $(a,0)$ hanno la caratteristica che $(a,0)\in\mathbb{C}=a\in\mathbb{R}$

Se ora prendiamo il numero complesso $(0,1)$ e lo moltiplichiamo per se stesso (ovvero lo eleviamo al quadrato) abbiamo che

$$(0,1)\cdot(0,1)=(0,1)^2=(-1,0)=-(1,0)=-1 \qquad (0,1)=i \quad i^2=-1$$

Nel campo dei complessi abbiamo trovato un numero il cui quadrato è pari a $-1\in\mathbb{R}$; definiamo il numero $(0,1)$ **unità immaginaria** che indichiamo con i