FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Dopo aver introdotto l'unità immaginaria i, tenuto conto che $(a,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=(a,0)+(0b-0\,1,\,0\,0+b\cdot 1)$ possiamo scrivere che

$$\forall z=(a,b)\in \mathbb{C},\ z=a+ib$$

$a+ib$ si dice **forma algebrica** del numero complesso (a,b).
Il numero reale a si dice parte reale di z $\operatorname{Re} z$
il numero reale b si dice coefficiente dell'immaginario di z $\operatorname{Im} z$ ed ib si dice parte immaginaria di z.

L'utilità della forma algebrica sta nel fatto che nelle espressioni $a+ib$ si può ricorrere alle ordinarie regole del calcolo letterale, tenendo conto però che $i^2=-1$

Si dice **complesso coniugato** del numero $z=a+ib$ il numero $\bar{z}=a-ib$ con segno $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$ opposto.

Per i reali $z=\bar{z}$ e per gli immaginari puri (quelli nella forma $(0,a)$) vale $z=-\bar{z}$

Altre relazioni facilmente verificabili sono:

$$\overline{(\bar{z})}=z \qquad \operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z=\frac{z-\bar{z}}{2i} \qquad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \text{ con } w\neq(0,0)$$

$$z\bar{z}=(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2=|z|^2 \qquad \overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w} \qquad \overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$$

MODULO DI UN NUMERO COMPLESSO

Si dice modulo di un numero complesso $z=a+ib$ il numero reale non negativo $|z|$ definito come

$$|z|=(z\cdot\bar{z})^{1/2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Proprietà del modulo

A) Il modulo di un numero complesso è nullo se e solo se il numero è nullo $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

B) I moduli di due numeri comp. coniugati sono uguali $|z|=|\bar{z}|$ infatti $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(-b)^2}$

C) Il modulo del prodotto di due numeri complessi è dato dal prodotto dei moduli $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$

D) Il modulo del quoziente di due numeri complessi è dato dal quoziente dei moduli $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

E) Se z è un numero reale il modulo è dato dal suo valore assoluto $z=a+i0 \Rightarrow |z|=|a|$

Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze

1) $|z+w|\leq|z|+|w|$

2) $\big||z|-|w|\big|\leq|z-w|$

3) $\max(\operatorname{Re} z,\operatorname{Im} z)\leq|z|\leq|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$