SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

Si definisce successione reale una applicazione f definita dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ nel sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Essa si indica con la notazione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
o con la locuzione "successione $\{a_n\}$".
Il numero reale $a_n = f(n)$ si dice termine n-mo della successione. Si indica con "insieme $\{a_n\}$" l'insieme dei termini di una successione di $\mathbb{R}$ immagine dell'insieme $\mathbb{N}$ secondo f:

"insieme $\{a_n\} = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n = f(n), n \in \mathbb{N}\} = f(\mathbb{N})$

Sottolineiamo la differenza fra l'insieme "$\{a_n\}$" e la "successione $\{a_n\}$" in quanto nel primo casi uguali sono trattati dalla stessa stessa in quanto stessi elementi di $\mathbb{R}$, mentre nel secondo, due elementi dello stesso valore sono differenti in quanto immagini di indici diversi.
È evidente inoltre che una successione non è necessariamente iniettiva in quanto da indici diversi possono essere associati valori reali identici.
È altresì evidente che una successione non sarà mai suriettiva in quanto l'insieme $\mathbb{R}$ ha potenza maggiore dell'insieme $\mathbb{N}$ (si dice che $\mathbb{R}$ ha la potenza del continuo mentre $\mathbb{N}$ ha quella del numerabile)

DEFINIZIONE DI UNA SUCCESSIONE PER INDUZIONE

Una successione può anche essere assegnata per induzione, definendone il termine a_1 per $n=1$ ed una applicazione $f: \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che associ, per $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = f(a_n, n)$$

SUCCESSIONI LIMITATE SUPERIORMENTE ED INFERIORMENTE

Una successione si dice limitata superiormente se l'insieme $\{a_n\}$ è limitato superiormente, cioè esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists K \in \mathbb{R} : a_n \leq K \Rightarrow$ successione $\{a_n\}$ è superiormente limitata

Una successione si dice limitata inferiormente se l'insieme $\{a_n\}$ è limitato inferiormente, cioè se esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists h \in \mathbb{R} : a_n \geq h \Rightarrow$ successione $\{a_n\}$ è inferiormente limitata

La successione $\{a_n\}$ si dice limitata se è limitata sia inferiormente che superiormente, cioè

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists K, h \in \mathbb{R} : h \leq a_n \leq K \Rightarrow$ successione $\{a_n\}$ è limitata.

SUCCESSIONI CRESCENTI, DECRESCENTI, MONOTONE

Una successione si dice crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$

Una successione si dice decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n+1}$

Una successione si dice non crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$

Una successione si dice non decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$

Una successione che è contemporaneamente non crescente e non decrescente si dice costante

Una successione che è non crescente o non decrescente si dice monotona