SUCCESSIONE ESTRATTA DA UNA SUCCESSIONE DATA

Si ha $\{a_n\}$ successione reale e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ crescente cioè tale che per $h<k$ si abbia $g(h)<g(k)$. Posto $g(k)=n_k$, la successione:

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

che ha per termine k-esimo l'elemento a_{n_k} della successione data si dice **successione estratta** dalla successione $\{a_n\}$.

Una successione estratta può essere considerata come un'applicazione composta $f \circ g$ dove $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. $f(g(k)) = a_{n_k} \in \mathbb{R}$

PROPRIETÀ VERIFICATE DEFINITIVAMENTE DA UNA SUCCESSIONE.

Si dice che la successione $\{a_n\}$ **verifica definitivamente** la proprietà **P** se tutti i termini, fatta eccezione al più per un numero finito di essi, verificano la proprietà P.

Ciò equivale a dire che l'insieme dei termini che non soddisfano P è finito, ed è quindi dotato di massimo. Se chiamiamo ν tale massimo, si ha che i termini con indice maggiore dell'indice ν di tale termine verificano P. Possiamo quindi definire in modo equivalente al precedente:

Una successione $\{a_n\}$ **verifica definitivamente** la proprietà P se tutti i termini con indice n maggiore di ν verificano P.

Possiamo quindi parlare di:

- successione definitivamente positiva (negativa)
- successione definitivamente crescente (decrescente)

- diciamo che la successione $\{a_n\}$ è definitivamente maggiorata dalla successione $\{b_n\}$ se la successione $\{b_n - a_n\}$ è definitivamente non positiva, oppure che si ha definitivamente $a_n \leq b_n$. Analogo discorso vale per $\{a_n\}$ minorata da $\{b_n\}$.

- diciamo che la successione $\{a_n\}$ è definitivamente maggiorata da M se, per $n>\nu$ si ha che $a_n \leq M$

- diciamo invece che la successione $\{a_n\}$ è definitivamente limitata se esiste un $M \in \mathbb{R}$ per cui si ha definitivamente che $|a_n| \leq M$.

Una successione può anche verificare definitivamente più di una proprietà P, purché la quantità delle proprietà sia in numero finito.

ESEMPIO

Per chiarire questo concetto definiamo la successione $a_n = \frac{1}{n}$

È ovvio che essa soddisfa definitivamente le seguenti proprietà:

P_0 i termini sono non negativi
P_1 i termini sono minori di 1
P_2 i termini sono minori di $1/2$ $(\nu = 2)$
. . . .

purché esse siano in numero finito. Se infatti prendessimo l'insieme intersezione $\bigcap_{i=0}^{\infty} E_i$ dove $E_i = \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{i}\}$

avremo l'elemento $0 \leq x < \frac{1}{i}$ dove x è minore di qualsiasi $\frac{1}{i}$ con $i \in \mathbb{N}$ cioè, per il corollario 1, $x=0$.

TEOREMA 1: Se la successione $\{a_n\}$ verifica definitivamente la proprietà P, ogni successione da essa estratta verifica definitivamente la stessa proprietà.

Non è vero il contrario, cioè una successione estratta da una successione data può verificare delle proprietà che non erano soddisfatte dalla successione data.

TEOREMA 2: una successione $\{a_n\}$ definitivamente limitata superiormente è superiormente limitata (teorema analogo esiste per $\{a_n\}$ limitata inferiormente). Se $a_n \leq M$ definit. esiste un $K = \max\{a_n : a_n > M\}$. Allora $M' = \max\{M, K\}$ è ancora maggiorante.