LIMITI DI UNA SUCCESSIONE REALE

Data una successione reale $\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n$, si dice che essa è **infinitesima** (tende a zero) per n che tende all'infinito, e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = 0 \qquad a_n \to 0$$

a) se, fissato comunque un numero positivo ε si ha definitivamente $|a_n| < \varepsilon$, cioè $-\varepsilon < a_n < +\varepsilon$

b) se fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$ soltanto per un numero finito di indici è verificata la disuguaglianza $|a_n| \geq \varepsilon$

c) se fissato comunque un numero $\varepsilon > 0$ si può determinare in corrispondenza un indice ν_ε, dipendente da ε, tale che per ogni indice $n > \nu_\varepsilon$ si abbia $|a_n| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > \nu_\varepsilon, |a_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \{a_n\} = 0$$

È ovvio che le condizioni b), c) sono conseguenze della a).
Ricordiamo che solitamente $\nu_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$
Mentre se una successione oltre ad essere infinitesima è a termini definitivamente non negativi, possiamo scrivere che $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = +0$
Analogamente per una successione infinitesima e a termini definitivamente non positivi scriviamo che $\lim_{n\to\infty}\{a_n\} = -0$

OSSERVAZIONE: il valore dell'indice ν è strettamente dipendente da ε e non arbitrario. È errore imperdonabile confondere la definizione di limite con la seguente
$\exists \nu : \forall \varepsilon > 0, \forall n > \nu \ |a_n| < \varepsilon$ $\quad (\Rightarrow \forall n > \nu \ a_n = 0)$
In questo caso ν è indipendente da ε e la scrittura suddetta implica che la successione è nulla per indici n maggiori di ν (attenzione $a_n \to 0 \neq a_n = 0$)

SUCCESSIONI CONVERGENTI

Sia $l \in \mathbb{R}$, una successione $\{a_n\}$ si dice **convergente al limite** l se la successione $\{a_n - l\}$ è infinitesima, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > \nu_\varepsilon, |a_n - l| < \varepsilon \quad (l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon)$$

Scriviamo quindi che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ oppure $a_n \to l$

OSSERVAZIONE: una successione costante è convergente verso il valore comune dei suoi termini.

TEOREMA 1: una successione convergente non può ammettere due limiti distinti.

TEOREMA 2: una successione estratta da una successione convergente verso il limite l è ancora convergente verso lo stesso limite.

TEOREMA 3: una successione convergente è limitata. Infatti, essendo definitivamente limitata da l e essendo quella limitata per il teorema precedente. **OSSERVAZIONE**: Non è vero invece il viceversa, in quanto una successione può essere limitata ma non convergente.
Prendiamo, ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$
Essa è evidentemente limitata, essendo l'insieme $\{a_n\}$ composto dai soli elementi 1 e -1, ma è altrettanto evidente che essa non è convergente verso alcun limite, in quanto i due elementi si alternano all'infinito.