SUCCESSIONI DIVERGENTI POSITIVAMENTE

Una successione reale $\{a_n\}$ si dice positivamente divergente o che ha per limite l'infinito positivo ($+\infty$) (o ancora che a_n tende all'infinito $a_n \to +\infty$) e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \boxed{\forall K\in\mathbb{R}\ \exists \nu_K\in\mathbb{N}: \forall n\in\mathbb{N},\ n>\nu_K,\ a_n>K \Rightarrow a_n\to+\infty}$$

definizione in simboli

quando fissato comunque un numero reale K si ha definitivamente $a_n>K$ (esiste cioè un ν_K tale che $\forall n>\nu_K$ si ha che $a_n>K$).

SUCCESSIONI DIVERGENTI NEGATIVAMENTE

Si dice che una successione reale $\{a_n\}$ è negativamente divergente (o anche che ha per limite l'infinito negativo ($-\infty$) o ancora che a_n tende all'infinito negativo ($a_n \to -\infty$)) e si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

quando, fissato comunque un numero reale K si ha definitivamente $a_n<K$

$$\boxed{\forall K\in\mathbb{R}\ \exists \nu_K\in\mathbb{N}: \forall n\in\mathbb{N},\ \nu_K>n,\ a_n<K \Rightarrow a_n\to-\infty}$$

TEOREMA 1 Una successione estratta da una successione divergente positivamente [negativamente] è ancora divergente positivamente [negativamente].

Pertanto possiamo considerare "l'essere divergente" una proprietà della successione data.

TEOREMA 2 Una successione divergente positivamente [negativamente] non è limitata superiormente [inferiormente].

OSSERVAZIONE: La proposizione inversa può non essere vera. Prendiamo, per esempio di chiarificare, la successione

A) $\{(-1)^n \cdot n\} = -1, 2, -3, 4 \ldots$

non è superiormente limitata ma non è nemmeno convergente positivamente, così come la successione

B) $n^{(-1)^n} = 1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6 \ldots$

Per la successione (A) vale anche la considerazione sulle successioni non limitate inferiormente che non sono però divergenti negativamente. Sempre per la successione (A), però possiamo considerare valida la seguente proprietà: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

Diciamo quindi che tale successione è divergente in modulo.

SUCCESSIONI REGOLARI E NON REGOLARI

Si dicono successioni regolari le successioni che sono o convergenti o divergenti positivamente, o divergenti negativamente.

Si dicono non regolari le successioni che non sono né convergenti, né divergenti positivamente né divergenti negativamente. Pertanto sono successioni non regolari anche le successioni divergenti in modulo.

ALTRI TEOREMI

TEOREMA 3 Da ogni successione limitata è possibile estrarre una successione convergente.

TEOREMA 4 Da ogni successione non limitata superiormente è possibile estrarre una successione convergente positivamente.

TEOREMA 5: Da ogni successione non limitata inferiormente è possibile estrarre una successione divergente negativamente.