TEOREMI E PROPRIETÀ DEI LIMITI DI SUCCESSIONI

TEOREMA 1 Si abbiano due successioni convergenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

A) Se $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ [>] allora si ha definitivamente $a_n < b_n$ [>]

$a<b \Rightarrow a_n<b_n$ definitivamente

CONSEGUENZE DI A) Se $\{b_n\}$ è costante, quindi si ha che $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ dove b è l'elemento unico dell'"insieme $\{b_n\}$"
quindi se $\lim_{n\to\infty} a_n = a > b$ [<] $\Rightarrow a_n > b$ [<] definitivamente

In particolare con $b=0$ - se $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ $\{a_n\}$ è definitivamente positiva
- se $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$ $\{a_n\}$ è definitivamente negativa

B) Se si ha definitivamente $a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

TEOREMA 2 (anche detto "dei * carabinieri") Si abbiano le successioni convergenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ dell'ipotesi del teorema 1 e una successione $\{c_n\}$ t.c.
se definitivamente $a_n \leq c_n \leq b_n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ $(a=b)$
allora $\{c_n\}$ è convergente e si ha che $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

OSSERVAZIONE: Se nel teorema 1B l'ipotesi fosse stata $a_n<b_n$ definitivamente, la tesi sarebbe rimasta invariata, ovvero $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

Se prendessi ad esempio $\{a_n\} = \frac{1}{n^2}$ e $\{b_n\} = \frac{1}{n}$, pur avendo definitivamente $a_n<b_n$
il limite $a=\lim_{n\to\infty} a_n$ ed il limite $b=\lim_{n\to\infty} b_n$ sono uguali.

TEOREMA 3 (OPERAZIONI SULLE SUCCESSIONI CONVERGENTI) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ le successioni definite nelle ipotesi del teorema 1 (convergenti)

A) la successione $\{|a_n|\}$ è convergente e si ha:
$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

B) la successione $\{a_n+b_n\}$ è convergente e si ha
$\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = (a+b) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

C) la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ è convergente e si ha:
$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = (a \cdot b) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

D) Se $\lim b_n = b \neq 0$ ($\{b_n\}$ non è infinitesima) la successione $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ è convergente e si ha che:
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

CASI PARTICOLARI $\lim_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

$\lim_{n\to\infty} k\, a_n = k \cdot a$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a-b$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$ (con $a \neq 0$)