

ESTENSIONI DEI TEOREMI SUL CONFRONTO A SUCCESSIONI DIVERGENTI E NON REGOLARI

TEOREMA 1 A) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ oppure $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ allora si ha definitivamente che $a_n < b_n$

B) Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora
 - se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, anche $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$
 - se $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

TEOREMA 2 (OPERAZIONI SU SUCCESSIONI DIVERGENTI)

A) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\{b_n\}$ limitata superiormente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$

A1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $\{b_n\}$ limitata inferiormente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$

B) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\{b_n\}$ tale che definitivamente $|b_n| > N > 0$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty$

B1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\{b_n\}$ è limitata $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$

C) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ e definitivamente $a_n \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

C1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e definitivamente $a_n \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

D) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ e $\{b_n\}$ definitivamente limitata e $b_n \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

D1) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ e definitivamente $b_n \neq 0$ e a_n limitata $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

D2) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ e definitivamente a_n limitata $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

RELAZIONI FORMALI PER LA SINTETIZZAZIONE DELLE PROPRIETA' SUI LIMITI DELLE SUCCESSIONI

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + \ell = +\infty$$

$$(-\infty) + \ell = -\infty$$

$$(+\infty) \cdot \ell = +\infty \quad (\ell > 0)$$

$$(+\infty) \cdot \ell = -\infty \quad (\ell < 0)$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\frac{\ell}{0} = \infty \quad (\ell \neq 0)$$

$$\frac{\ell}{\infty} = 0; \quad \frac{\infty}{\ell} = \infty$$

FORME INDETERMINATE

$$\infty \cdot 0; \quad +\infty + (-\infty); \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}$$