TEOREMI SULLE SUCCESSIONI MONOTONE

Soprattutto nel caso di successioni definite per induzione o ricorrenza possono risultare particolarmente utili i seguenti teoremi, che fanno di calcolarne i limiti.

TEOREMA 1A Se la successione reale $\{a_n\}$ è monotona non decrescente e non limitata, allora essa è divergente positivamente.

$$\forall n, n+1 \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}, \ \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n : |a_n| > M \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

TEOREMA 1B Se la successione reale $\{a_n\}$ è monotona non crescente e non limitata, allora essa è divergente negativamente

$$\forall n, n+1 \in \mathbb{N} \quad a_n > a_{n+1}, \ \forall M \in \mathbb{R} \ \exists n : |a_n| > M \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$$

TEOREMA 2 Se la successione reale $\{a_n\}$ è monotona e limitata, essa è convergente.

Con questi due teoremi possiamo riformulare le osservazioni che avevamo fatto trattando successioni limitate e non limitate.
Avevamo detto che una successione non limitata non è necessariamente divergente positivamente o negativamente. Ecco però che se essa è anche monotona possiamo stabilire a priori la divergenza.

TEOREMA 3A Se la successione reale $\{a_n\}$ è non decrescente e limitata si ha:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup \{a_n\}$$

TEOREMA 3B Se la successione reale $\{a_n\}$ è non crescente e limitata si ha

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf \{a_n\}$$

DEFINIZIONE Possiamo dimostrare che la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata. Pertanto, per il teorema 3A essa è convergente. Definiamo $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ dove e viene detto **numero di NEPER**.

Possiamo inoltre affermare che $\forall n \in \mathbb{N} \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$

ANALISI MAT. LEZ 29-10-98

MEDIE ARITMETICHE E MEDIE GEOMETRICHE DI UNA SUCCESSIONE

Data una successione $\{a_n\}$ si dice successione delle medie aritmetiche di $\{a_n\}$ la successione le cui termine n-esimo è pari alla media aritmetica dei primi n termini della successione data

$$a'_m = \left\{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right\} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} a_k$$

a'_m SUCCESSIONE DELLE MEDIE ARITMETICHE DI $\{a_n\}$

Supponendo che la successione $\{a_n\}$ sia a termini positivi si dice successione delle medie geometriche di $\{a_n\}$ la successione le cui termine n-esimo è dato dalla media geometrica dei primi n termini della successione data

$$a''_m = \sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

a''_m SUCCESSIONE DELLE MEDIE GEOMETRICHE DI $\{a_n\}$