TEOREMI SULLE MEDIE GEOMETRICHE ED ARITMETICHE DI UNA SUCCESSIONE

TEOREMA 1: se la successione $\{a_n\}$ è regolare è anche regolare la successione delle medie aritmetiche ed ammette lo stesso limite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

OSSERVAZIONE 1 Non è vero la proposizione inversa. Può infatti accadere che la successione delle medie aritmetiche sia regolare ma non lo sia la successione data.
Se prendiamo come esempio la successione $\{(-1)^n\}$ essa vale zero per n pari ed 1 per n dispari.
Essa è quindi infinitesima mentre la successione data non è regolare, ammettendo alternativamente i valori 1 e -1.

COROLLARIO 1: se la successione $\{a_{n+1}-a_n\}$ [oppure $\{a_n-a_{n-1}\}$] è regolare allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}-a_n$$

TEOREMA 2: se la successione a termini positivi $\{a_n\}$ è regolare è regolare anche la successione delle medie geometriche di $\{a_n\}$ ed ammette lo stesso limite.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

OSSERVAZIONE 2: Anche in questo caso non è vero il contrario e può accadere che la successione delle medie geometriche sia regolare mentre non lo sia successione data.

COROLLARIO 2: Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Se è regolare la successione $a_n : a_{n-1}$, allora:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$