

CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY

DEFINIZIONE DI SUCCESIONE DI CAUCHY

La successione $\{a_n\}$ si dice successione di Cauchy se, fissato comunque $\epsilon > 0$ si può determinare un indice N tale che, per ogni $n, m > N$ si abbia $|a_n - a_m| < \epsilon$

TEOREMA 1 Ogni successione convergente a_n è una successione di Cauchy.

oppure: condizione necessaria affinché una successione sia convergente è che essa sia una successione di Cauchy.
 $\forall \epsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \implies |a_n - a_m| < \epsilon \implies \forall \epsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \implies |a_n - a_m| < \epsilon$
Più di arrivare ad affermare che tale condizione è anche sufficiente abbiamo bisogno di enunciare (e dimostrare) i seguenti lemmi.

LEMMA 1 Una successione di Cauchy è limitata.

LEMMA 2 (TEOREMA DI BOLZANO-WEI STRASS)

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Esiste allora almeno una successione estratta da essa che sia convergente.

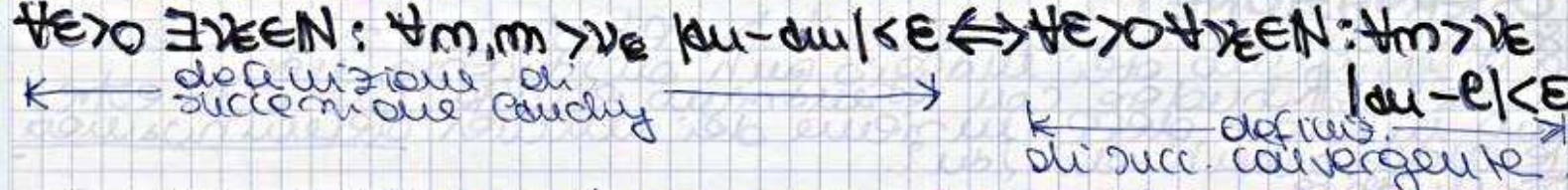
LEMMA 3 Una successione di Cauchy $\{a_n\}$ che contiene una successione estratta convergente ad l , è a sua volta convergente ad l .

TEOREMA 2 Ogni successione di Cauchy è convergente.

oppure: condizione sufficiente affinché una successione sia convergente è che sia una successione di Cauchy.
 $\forall \epsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N \implies |a_n - a_m| < \epsilon \implies \forall \epsilon > 0 \exists N: \forall n > N \implies |a_n - l| < \epsilon$
Dato il lemma del teorema 1 e del teorema 2 possiamo enunciare la seguente

PROPOSIZIONE Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione reale sia convergente è che essa sia una successione di Cauchy.

RIASSUMENDO



OSSERVAZIONE 1 L'importanza del criterio di convergenza di Cauchy è che pur non conoscendo il valore l del limite l , possiamo affermare che una successione è convergente verificando che essa è una successione di Cauchy.

OSSERVAZIONE 2 Il criterio di Cauchy è valido nel campo dei reali perché esso è un campo completo. Non è valido, ad esempio nel campo dei razionali. In un punto, esso non può dare alcuna idea della completezza. Ne segue che possiamo enunciare la seguente

ASSIOMA DELLA COMPLETEZZA

Un campo \mathbb{R} si dice completo se in esso ogni successione di Cauchy è convergente.

OSSERVAZIONE 3: Sia $\{a_n\}$ una successione ad esito $0 < k < 1$ per cui

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k |a_n - a_{n-1}|$$

Allora la successione $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy e pertanto convergente.

(1) $9 \times 10 = 90$ $9 \times 100 = 900$ $9 \times 1000 = 9000$ $9 \times 10000 = 90000$ $9 \times 100000 = 900000$ $9 \times 1000000 = 9000000$ $9 \times 10000000 = 90000000$ $9 \times 100000000 = 900000000$ $9 \times 1000000000 = 9000000000$