CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY

DEFINIZIONE DI SUCCESSIONE DI CAUCHY

La successione $\{a_n\}$ si dice successione di Cauchy se, fissato comunque $\varepsilon>0$ si può determinare un indice ν_ε tale che, per ogni $n,m>\nu_\varepsilon$ si abbia $|a_n-a_m|<\varepsilon$

TEOREMA 1 Ogni successione convergente è una successione di Cauchy

oppure: condizione necessaria affinché una successione sia convergente è che essa sia una successione di Cauchy.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu_\varepsilon: \forall n>\nu_\varepsilon\ |a_n-l|<\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_\varepsilon: \forall n,m>\nu_\varepsilon\ |a_n-a_m|<\varepsilon$$

Prima di arrivare ad affermare che tale condizione è anche sufficiente abbiamo bisogno di enunciare (e dimostrare) i seguenti lemmi.

LEMMA 1 Una successione di Cauchy è limitata

LEMMA 2 (TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS) Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Esiste allora almeno una successione estratta da essa che sia convergente.

LEMMA 3 Una successione di Cauchy $\{a_n\}$ che contiene una successione estratta convergente ad l, è essa stessa convergente ad l.

TEOREMA 2 Ogni successione di Cauchy è convergente

oppure: condizione sufficiente affinché una successione sia convergente è che essa sia una successione di Cauchy.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu_\varepsilon: \forall n,m>\nu_\varepsilon\ |a_n-a_m|<\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \nu_\varepsilon: \forall n>\nu_\varepsilon\ |a_n-l|<\varepsilon$$

Dall'unione del teorema 1 e del teorema 2 possiamo enunciare la seguente

PROPOSIZIONE Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione reale sia convergente è che essa sia una successione di Cauchy.

RIASSUMENDO

$$\underbrace{\forall\varepsilon>0\ \exists\nu_\varepsilon\in\mathbb{N}: \forall n,m>\nu_\varepsilon\ |a_n-a_m|<\varepsilon}_{\text{definizione di successione Cauchy}} \Leftrightarrow \underbrace{\forall\varepsilon>0\ \forall\nu_\varepsilon\in\mathbb{N}: \forall n>\nu_\varepsilon\ |a_n-l|<\varepsilon}_{\text{definiz. di succ. convergente}}$$

OSSERVAZIONE 1 L'importanza del criterio di convergenza di Cauchy è che pur non conoscendo il valore del limite l, possiamo affermare che una successione è convergente verificando che essa è una successione di Cauchy.

OSSERVAZIONE 2 Il criterio di Cauchy è valido nel campo dei reali perché esso è un campo completo. Non è valido ad esempio nel campo dei razionali in quanto esso non gode della proprietà della completezza. Nel senso che possiamo enunciare il seguente assioma:

ASSIOMA DELLA COMPLETEZZA

Un campo si dice completo se in esso ogni successione di Cauchy è convergente.

OSSERVAZIONE 3: Sia $\{a_n\}$ una successione ed esista $0<K<1$ per cui

$$|a_{n+1}-a_n|\le K|a_n-a_{n-1}|$$

Allora la successione $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy e pertanto convergente.