MASSIMO LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

DEFINIZIONE

Si dice massimo limite della successione $\{a_n\}$ e si indica con $\max\lim_{n\to\infty} a_n = l''$ l'estremo inferiore dell'insieme B costituito dai numeri definitivamente maggioranti di $\{a_n\}$.

cioè $B=\{x\in\mathbb{R}: a_n \leq x \text{ definitivamente}\}$ $\quad l''=\max\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(B)$

Nel caso di successioni limitate avremo che B sarà certamente non vuoto e limitato inferiormente. Ricordando le definizioni di maggiorante e di estremo inferiore, enunciamo il

TEOREMA 1

1) Un numero l'' è il massimo limite della successione $\{a_n\}$ se e solo se: comunque si fissi $\varepsilon>0$ il numero $l''+\varepsilon$ (che rappresenta un qualsiasi numero reale maggiore di l'') è ancora definitivamente maggiorante della successione mentre $l''-\varepsilon$ (che rappresenta un qualsiasi numero reale minore di l'') non è mai definitivamente maggiorante della successione.

$$\forall\varepsilon>0 \quad \begin{cases} l''+\varepsilon \text{ è def maggiorante} \\ l''-\varepsilon \text{ non è def maggiorante} \end{cases} \Rightarrow l''=\max\lim_{n\to\infty} a_n$$

Un altro enunciato equivalente del teorema è

2) $l'' = \max\lim_{n\to\infty} a_n$ se

A) comunque si fissi $\varepsilon>0$ è possibile determinare un indice ν_ε tale che, per ogni $n>\nu_\varepsilon$ si abbia $a_n<l''+\varepsilon$

B) comunque si fissi $\varepsilon>0$ esistono infiniti indici m per i quali $a_n>l''-\varepsilon$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \begin{cases} \exists\nu_\varepsilon\in\mathbb{N}: \forall m>\nu_\varepsilon \quad a_n<l''+\varepsilon \\ \exists \text{ infiniti } m\in\mathbb{N}: a_n>l''-\varepsilon \end{cases} \Rightarrow l''=\max\lim_{n\to\infty} a_n$$

OSSERVAZIONE 1

Se una successione è limitata l'estremo superiore di a, il minimo dei maggioranti di $\{a_n\}$ allora non è da confondere con il massimo limite che è l'estremo inferiore dell'insieme dei numeri definitivamente maggioranti di $\{a_n\}$.

Per chiarire

$A=\{x\in\mathbb{R}: x \text{ è maggiorante di } a_n\}$ $\quad B=\{x\in\mathbb{R}: x \text{ è definitivamente maggiorante}\}$

quindi $B\supseteq A$. $\sup\{a_n\}=\min A$ $\quad \max\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(B)$

Pertanto avremo la seguente relazione

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n \leq \sup\{a_n\}$$

possono esistere $m: a_n \geq x$ ma solo in numero finito

OSSERVAZIONE 2

Se una successione reale non è limitata superiormente, o, che è lo stesso, l'insieme dei maggioranti di $\{a_n\}$ è l'insieme vuoto, viene posto per definizione che

$$\max\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

MINIMO LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

DEFINIZIONE

Si dice minimo limite della successione $\{a_n\}$ e si indica con $\min\lim_{n\to\infty} a_n$ l'estremo superiore dell'insieme A costituito dai numeri definitivamente minoranti della successione $\{a_n\}$

$A=\{x\in\mathbb{R}: a_n\geq x \text{ definitivamente}\}$ $\quad l'=\min\lim_{n\to\infty} a_n=\sup(A)$