Dopo aver definito il minimo limite, ricordando le definizioni di minorante ed estremo inferiore enunciamo il

(29)

TEOREMA 1) un numero l' è il minimo limite della successione $\{a_n\}$ se e soltanto se
- comunque si fissa $\varepsilon>0$ il numero $l'-\varepsilon$ è ancora minorante della successione mentre il numero $l'+\varepsilon$ non è più minorante della successione

(con $l'+\varepsilon$ ed $l'-\varepsilon$ si indicano rispettivamente numeri reali maggiore o minore di l') $\forall\varepsilon>0$ $l'+\varepsilon$ non è def. minorante, $l'-\varepsilon$ è defin. minorante

stessa equivale a dire che:

2) $l' = \min\lim_{n\to\infty} a_n$ se:

a) comunque si fissa $\varepsilon>0$ è possibile determinare un indice ν_ε tale che, per ogni $n>\nu_\varepsilon$ si abbia: $a_n > l'-\varepsilon$

b) comunque si fissa $\varepsilon>0$ esistono infiniti indici n tali che $a_n < l'+\varepsilon$

$$\forall\varepsilon>0 \begin{cases} \exists\,\nu_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall n>\nu_\varepsilon \quad a_n>l'-\varepsilon \\ \exists \text{ infiniti } m\in\mathbb{N} : a_n<l'+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow l' = \min\lim_{n\to\infty} a_n$$

OSSERVAZIONE 1

Come per il massimo limite, se una successione è inferiormente limitata vale la relazione $\inf\{a_n\} \leq \min\lim_{n\to\infty} a_n$

OSSERVAZIONE 2

Se una successione reale non è limitata inferiormente il che equivale a dire che è minorante a della defeliz! e è un nome vuoto, si assume per definizione

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

RELAZIONI FRA MASSIMO LIMITE E MINIMO LIMITE

La prima relazione che si verifica facilmente è la seguente

$$\min\lim_{n\to\infty} a_n = -\max\lim_{n\to\infty}(-a_n)$$

Ben più importante è quella che lega

$$l' = \min\lim_{n\to\infty} a_n \quad e \quad l'' = \max\lim_{n\to\infty} a_n$$

secondo la disuguaglianza sempre verificata:

$$\boxed{l' \leq l''}$$

(relazione che si rivelerà utile nella dimostrazione del teorema successivo)

TEOREMA 2 condizione necessaria e sufficiente affinché una successione sia convergente è che si abbia $l'=l''$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\nu_\varepsilon\in\mathbb{N} : \forall n>\nu_\varepsilon \ |a_n-l|<\varepsilon \Leftrightarrow \min\lim_{n\to\infty} a_n = \max\lim_{n\to\infty} a_n$$

TEOREMA 3 Se $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy, allora essa è limitata e $\min\lim_{n\to\infty} a_n = \max\lim_{n\to\infty} a_n$

TEOREMA 4 Da una successione non regolare $\{a_n\}$ si possono sempre estrarre almeno due successioni regolari (anzi convergenti se limitate) con limiti diversi fra loro (uguali rispettivamente a $\min\lim_{n\to\infty} a_n$ ed a $\max\lim_{n\to\infty} a_n$).

OSSERVAZIONE 3

Dal teorema precedente comprendiamo anche meglio il significato dei termini massimo limite e minimo limite infatti, nel caso in cui da una successione non regolare fosse possibile estrarre successioni convergenti, i rispettivi limiti sarebbero comunque compresi fra il massimo ed il minimo limite.

OSSERVAZIONE 4! Dal teorema 4 si può dedurre ~~...~~ ancora il teorema di Bolzano Weierstrass.