

# FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

(3)

## DEFINIZIONE

Si dice funzione reale di variabile reale ogni applicazione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $I$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e per ogni  $x \in I$  si associa un unico  $y \in \mathbb{R}$ . L'insieme  $f(I) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in I, f(x) = y\}$  è detto immagine della  $f$  in  $\mathbb{R}$ .  
 Il valore della funzione nel punto  $x$  di  $I$  viene indicato con  $f(x)$ .

È noto che spesso si considera  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e  $f$  un'intervallo di  $\mathbb{R}$ .

$I$  è un intervallo se e solo se  $\forall x, x'' \in I \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x' \in I$  con  $x < x' < x''$ .

## FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è crescente nell'intervallo  $I$  se

$$\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è decrecente nell'intervallo  $I$  se

$$\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$$

Le funzioni crescenti e decrescenti si dicono monotone in senso stretto in  $I$ .

## FUNZIONI NON DECRESCENTI E NON CRESCENTI

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice non decrescente in  $I$  se

$$\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

Una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice non crescente in  $I$  se

$$\forall x, x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$

Le funzioni non crescenti e non decrescenti si dicono monotone in  $I$ .

## FUNZIONI SUPERIORMENTE ED INFERIORMENTE LIMITATE

Una funzione  $f$  si dice superiormente limitata se esiste un numero  $M$  tale che per ogni  $x \in I$  si ha  $f(x) \leq M$ .  
 Si dice inferiormente limitata se esiste un numero  $N$  tale che per ogni  $x \in I$  si ha  $f(x) \geq N$ .

Una funzione  $f$  si dice limitata se è sia superiormente che inferiormente limitata, cioè se

$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, f(x) \leq M$  e  $\exists N \in \mathbb{R} : \forall x \in I, f(x) \geq N$ .

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, |f(x)| \leq M$$

## OSSERVAZIONI

- una funzione monotona in un intervallo chiuso  $[a, b]$  è limitata.
- una funzione monotona in un intervallo  $[a, b[$  o  $]a, b]$  è limitata superiormente o inferiormente.
- una funzione monotona in un intervallo aperto  $]a, b[$  o in un intervallo illimitato può essere non limitata superiormente e/o inferiormente.

## ESTREMO SUPERIORE ED ESTREMO INFERIORE

Si dice estremo superiore di una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  il numero  $\sup\{f(x) : x \in I\}$  e si indica con  $\sup_{x \in I} f(x) = \sup\{f(I)\}$ .