LIMITI DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $I \supseteq \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\}$

Prima di definire il limite di una funzione reale di variabile reale definiamo un intorno di x_0 privato di x_0.

DEFINIZIONE INTORNO: si dice intorno di x_0 di raggio δ, privato di x_0, l'insieme

$$\mathcal{I}_\delta = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} - \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$$

LIMITE DI UNA FUNZIONE REALE (DEFINIZIONE) IN UN PUNTO x_0

Si dice che $f(x)$ tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende al punto x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

se comunque si fissa un intorno V_ℓ di ℓ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni x che appartiene all'intorno $\mathcal{I}_\delta(x_0) - x_0$ di raggio δ si ha che $f(x) \in V_\ell$

$$\forall V_\ell \; \exists \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\} : \forall x \in \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\},\ f(x) \in V_\ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\forall V_\ell \; \exists \delta > 0 : \forall x \; \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta,\ f(x) \in V_\ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Nel caso di limite finito, cioè $\ell \in \mathbb{R}$ si ha la seguente

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONVERGENTE PER $x \to x_0$

Si dice che $f(x)$ tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende ad x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se comunque si fissa $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta > 0$ tale che per ogni x che appartiene all'intorno $\mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\}$ si ha che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\} : \forall x \in \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\},\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in I \; |x - x_0| < \delta,\ f(x) - \ell < \varepsilon \Rightarrow$$

Nel caso di $\ell = +\infty$ abbiamo la

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DIVERGENTE POSITIVAMENTE PER $x \to x_0$

Si dice che $f(x)$ diverge positivamente o che ha per limite infinito positivo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

se, comunque si fissa $K \in \mathbb{R}$ esiste un δ tale che per ogni x dell'intorno $\mathcal{I}_\delta$ di x_0 privato di x_0 si ha che $f(x) > K$

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\} : \forall x \in \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\} \; f(x) > K \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \; f(x) > K \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DIVERGENTE NEGATIVAMENTE PER $x \to x_0$

Si dice che $f(x)$ tende all'infinito negativo per x che tende ad x_0 (o che $f(x)$ diverge negativamente per x che ...) e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se comunque si fissa $K \in \mathbb{R}$ esiste un intorno $\mathcal{I}_\delta(x_0)$ privato di x_0 tale che per ogni x dell'intorno si ha che $f(x) < K$

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\} : \forall x \in \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\} \; f(x) < K \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\forall K \in \mathbb{R} \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \; f(x) < K \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$