Per evitare di dimostrare alcuni teoremi sui limiti dimostrati per le successioni, risulta fondamentale il seguente teorema che permette di "collegare" il concetto di limite di funzione reale a quello di limite di successione reale.

TEOREMA DEL COLLEGAMENTO

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$ è che, per ogni successione x_n di elementi di $I - \{x_0\}$ convergenti ad x_0 si abbia che:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$$

Grazie al teorema del collegamento possiamo formulare i teoremi dei limiti di successione per quanto riguarda ora le funzioni reali.

TEOREMA 1

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

Allora

A) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

B) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$

C) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$

D) se $m \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

TEOREMA 2

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$

A) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq -\infty$ $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$

B) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 0 \\ -\infty & \text{se } l < 0 \end{cases}$

Valgono inoltre quelle relazioni formali che furono formulate nel capitolo relativo ai limiti di successioni.

TEOREMA DEI CARABINIERI

Date $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

e per ogni $x \in I - \{x_0\}$ si abbia: $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

Allora avremo che anche $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

TEOREMA 3

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora esiste $\delta > 0$ tale che nell'intorno I_δ di x_0 di raggio δ, privato di x_0, $f(x)$ è limitata.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e se $l \neq 0$ allora esiste un intorno di x_0, privato di x_0, ove $f(x)$ ha il segno di l.

DEFINIZIONE DI INTORNO DI $+\infty$

In $\mathbb{R}$ si può definire come intorno di $+\infty$ l'insieme

$I = \{x \in \mathbb{R} : x > K\}$ $K \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE DI INTORNO DI $-\infty$

In $\mathbb{R}$ si può definire come intorno di $-\infty$ l'insieme

$I = \{x \in \mathbb{R} : x < K\}$ $K \in \mathbb{R}$