DEFINIZIONE DI LIMITE PER $x \to \pm\infty$

Si dice che $f(x)$ tende ad $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ per x che tende a $+\infty$ $[-\infty]$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad [\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}]$

se, comunque si fissa un intorno V di ℓ esiste un intorno U di $+\infty$ $[-\infty]$ tale che, per ogni x di U si ha che $f(x) \in V_\ell$

$\forall V_\ell \ \exists U_\infty : \forall x \in U \ f(x) \in V_\ell \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$

$\forall V_\ell \ \exists K \in \mathbb{R} : \forall x > K \ f(x) \in V_\ell \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

$\forall V_\ell \ \exists K \in \mathbb{R} : \forall x < K \ f(x) \in V_\ell \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONVERGENTE PER $x \to \pm\infty$

Si dice che $f(x)$ tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$ $[-\infty]$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ $\quad [\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell]$

se, comunque si fissa $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di $+\infty$ $[-\infty]$ tale che, per ogni $x \in U$ si abbia $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R} : \forall x > K \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R} : \forall x < K \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DIVERGENTE POSITIVAMENTE PER $x \to \pm\infty$

Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ (o diverge) per x che tende a $+\infty$ $[-\infty]$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad [\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty]$

se, comunque si fissa $K \in \mathbb{R}$ esiste un intorno U di $+\infty$ $[-\infty]$ tale che, per ogni $x \in U$ si abbia che $f(x) > K$

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists K' : \forall x > K', \ f(x) > K \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists K' : \forall x < K', \ f(x) > K \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

DEFINIZIONE DI FUNZIONE DIVERGENTE NEGATIVAMENTE PER $x \to \pm\infty$

Si dice che $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ $[-\infty]$ e si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\quad [\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty]$

se comunque si fissa $K \in \mathbb{R}$ esiste un intorno U di $+\infty$ $(-\infty)$ tale che, per ogni x di U si abbia $f(x) < K$

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists K' : \forall x > K' \ f(x) < K \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists K' : \forall x < K' \ f(x) < K \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

TEOREMA DEL COLLEGAMENTO PER FUNZIONI CON LIMITE PER $x \to \pm\infty$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è che, per ogni successione $\{x_n\}$ reale per cui tende $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ $[-\infty]$ si abbia che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Grazie al teorema del collegamento per i limiti delle successioni possiamo dedurre tutti i teoremi relativi alle successioni divergenti ed al loro confronto con successioni convergenti.