LIMITE DESTRO E LIMITE SINISTRO

Si dice che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende ad x_0 da destra [da sinistra] e si scrive

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \left[\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell\right]$$

se la funzione $g(y) = f\left(x_0 + \frac{1}{y}\right)$ tende ad ℓ per y che tende a $+\infty$ $[-\infty]$

LIMITE FINITO PER X CHE TENDE AD x_0 DA DESTRA [SINISTRA]

Si dice che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\left[\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}\right]$

se, comunque si fissa $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ per cui $0 < x - x_0 < \delta$ $[0 < x_0 - x < \delta]$ si abbia che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < x - x_0 < \delta\}\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \{x \in \mathbb{R} : 0 < x_0 - x < \delta\}\ |f(x) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$$

LIMITE INFINITO PER X CHE TENDE AD x_0 DA DESTRA [SINISTRA]

Si dice che $\lim_{x\to x_0^+} = +\infty$ $\left[\lim_{x\to x_0^-} = +\infty\right]$ se,

comunque si fissa $K \in \mathbb{R}$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I$ per cui $0 < x - x_0 < \delta$ $[0 < x_0 - x < \delta]$ si abbia che

$f(x) > K$

Si dice che $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ $\left[\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\right]$ se,

comunque si fissa $K \in \mathbb{R}$ esiste un δ tale che, per ogni x per cui $0 < x - x_0 < \delta$ $[0 < x - x_0 < \delta]$ si abbia che

$f(x) < K$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta : \forall x \in I\ 0 < x - x_0 < \delta\ f(x) > K \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{"} \quad [0 < x_0 - x < \delta] \quad \text{"} \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta : \forall x \in I : 0 < x - x_0 < \delta\ f(x) < K \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{"} \quad [0 < x_0 - x < \delta] \quad \text{"} \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

Analogamente a quanto succedeva con le successioni vogliamo trovare un criterio che ci permetta di affermare che una successione è convergente anche senza conoscerne il limite.

CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY

TEOREMA

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $I \supseteq \mathcal{I}_\gamma(x_0) - \{x_0\}$

Condizione necessaria e sufficiente affinché esista $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ è che, per ogni $\varepsilon > 0$, si possa determinare un intorno di x_0 privato di x_0, tale che, se x, y appartengono ad esso, si abbia $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\} : \forall x, y \in \mathcal{I}_\delta(x_0) - \{x_0\}\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

TEOREMI SULLE FUNZIONI MONOTONE

TEOREMA 1 Sia $f(x)$ una funzione monotona in un intervallo $I = [x_0, a[$ o $I =]x_0, a[$ $[I =]a, x_0]$ o $I =]a, x_0[$. Allora $f(x)$ risulta regolare al tendere di x ad x_0 da destra [da sinistra]. Il teorema vale anche se al posto di x_0 si considera $+\infty$ $[-\infty]$.

Enunciamo ora tale teorema nel caso di $f(x)$ non decrescente in un intervallo $I =]x_0, a[$.

TEOREMA 2: Nelle ipotesi ora formulate l'estremo inferiore di $f(x)$ nell'intervallo $]x_0, a[$ è anche il limite di $f(x)$ per x tendente ad x_0 da destra.

$$f : I =]x_0, a[\to \mathbb{R} : \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2\ f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow \sup f(I) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$