FUNZIONE IDENTICA e IMMERSIONE

Se $A \subset B$ la funzione $f: x \in A \to x \in B$ si dice immersione di A in B.

Nel caso in cui $B=A$ la funzione $f: x \in A \to x \in A$ viene detta funzione identica.

PRODOTTO CARTESIANO e GRAFICO DELLA FUNZIONE

Si dice prodotto cartesiano di A e B e si scrive $A \times B$ l'insieme delle coppie (x,y) con $x \in A$ e $y \in B$ $A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$

il sottoinsieme di $A \times B$ definito come

$$G_f = \{(x,y) \in A \times B : x \in A,\ y = f(x) \in f(A)\}$$

viene detto grafico della funzione f.

Nel caso in cui $B=A$, un sottoinsieme di $A \times A$ si chiama relazione binaria su A e si indica con R

RELAZIONI DI EQUIVALENZA e CLASSI DI EQUIVAL.

Una R su A è una relazione di equivalenza in A se:

1) è riflessiva $\forall x \in A,\ (x,x) \in R$ | $\forall x \in A \Rightarrow x \approx x$
2) è simmetrica $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ | $\forall x \in A,\ x \approx y \Rightarrow y \approx x$
3) è transitiva $\forall (x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ | $\forall x,y,z \in A,\ x \approx y,\ y \approx z \Rightarrow x \approx z$.

Per indicare che x è in relazione di equivalenza con y si scrive $x \approx y$

Viene definito classe di equivalenza A_i il sottoinsieme di A in cui si trovano tutti gli elementi che sono equivalenti fra loro.

$$A_i = \{y \in A : y \approx x\} \supseteq A$$

le classi di equivalenza sono fra loro disgiunte $A_i \cap A_j = \emptyset$*

dimostrazione
se infatti $\exists y \in A_i, A_j$
detto $x \in A_i : x \approx y$ e
$z \in A_j : z \approx y$
per la transitiva $x \approx z$
$\Downarrow$
$A_i = A_j$)

INSIEME QUOZIENTE

L'insieme di tutte le classi di equivalenza di A si chiama insieme quoziente di A rispetto alla relazione di equivalenza R e si indica con $A/R = \{A_{x_1}, A_{x_2} ...\}$

Si dice **applicazione canonica** quella funzione suriettiva che associa ad ogni elemento di A la classe di equivalenza a cui appartiene

$$f: x \in A \to A_x \in A/R$$

ESEMPIO

$$\frac{n}{m} \approx \frac{n'}{m'} \Leftrightarrow n m' = m n' \text{ con } n, m, n', m' \in \mathbb{Z},\ m, m' \neq 0$$

Applicando la funzione canonica $f: \frac{n'}{m'} \in \mathbb{Q}' \to A_{n/m} \in \mathbb{Q}'/R$ permette di escludere, o meglio di associare alla propria classe di equivalenza tutti quei rapporti dove numeratore e denominatore non sono primi fra loro e sono quindi riconducibili ad un altro numero razionale.

In questo caso $\mathbb{Q}'/R = \mathbb{Q}$ e $A_{(n/m)} = p$ le classi di equivalenza sono cioè razionali