PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

I seguenti teoremi sono una immediata conseguenza dei teoremi sui limiti visti precedentemente.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua nel punto $x_0 \in I$ ed $f(x_0) > 0$ $[f(x_0) < 0]$. Allora esiste un intorno di x_0 di raggio δ in cui, per ogni $x \in J_\delta(x_0)$ $f(x)$ è positiva [negativa].

$$f: I \to \mathbb{R},\ \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists J_\delta x_0 : \forall x \in J_\delta(x_0)\ f(x) > 0$$

OSSERVAZIONE: una conseguenza di questo teorema è che se consideriamo un punto x_0 dove $f(x)$ è continua e, comunque preso $\delta > 0$, ogni intorno di x_0 contiene sia punti per cui $f(x)$ è positiva che punti per cui $f(x)$ è negativa, allora $f(x_0) = 0$.

TEOREMA 1 (OPERAZIONI FRA FUNZIONI CONTINUE IN UN PUNTO)

Siano $f, g: I \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in I$. Allora:

- la somma $f(x) + g(x)$ è continua in x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0)$
- la differenza $f(x) - g(x)$ è continua in x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = f(x_0) - g(x_0)$
- il prodotto $f(x) \cdot g(x)$ è continuo in x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$
- il modulo di $f(x)$ $|f(x)|$ è continuo in x_0: $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$
- se $f(x_0) \neq 0$ il reciproco $1/f(x)$ è continuo in x_0: $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)}$.

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Siano $g: I \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in I$ e $f: I' \to \mathbb{R}$ con $g(I) \subset I'$ e $y_0 = g(x_0) \in I'$. Allora $f \circ g: I \to \mathbb{R}$ è la funzione composta che $\forall x \in I$ associa $f(g(x)) = (f \circ g)(x) \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 2 Se la funzione $g: I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 e la funzione $f: I' \to \mathbb{R}$ è continua in $y_0 = g(x_0) \in I'$ allora la funzione composta $f \circ g$ è continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0,\ \lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[g(x_0)]$$

TEOREMA 3: se esiste $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ e se f è continua in y_0, allora risulta

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f(y_0) = f[\lim_{x \to x_0} g(x)]$$