FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO CHIUSO (A1)

TEOREMA DI WEIERSTRASS SULL'ESISTENZA DEL MASSIMO E DEL MINIMO

Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, allora essa è limitata in $[a,b]$ ed è dotata in $[a,b]$ di massimo e di minimo; esistono cioè in $[a,b]$ almeno due punti α, β tali che, per ogni $x \in [a,b]$ si ha che ①

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

cioè $f(\beta) = \max f([a,b])$ $\quad f(\alpha) = \min f([a,b])$.

TEOREMA SULL'ESISTENZA DEGLI ZERI ②

Se $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a,b]$ e negli estremi assume valori di **segno opposto** allora esiste in $[a,b]$ almeno un punto ξ in cui risulta $f(\xi)=0$.

TEOREMA SUI VALORI INTERMEDI ③

Se $f(x)$ è una funzione reale e continua nell'intervallo chiuso $I=[a,b]$, allora essa assume in $[a,b]$ **tutti i valori compresi** fra il suo minimo m ed il suo massimo M in $[a,b]$; cioè l'immagine $f(I)$ è un intervallo $[m,M]$ chiuso e limitato.

COROLLARIO1: Se $f(x)$ è una funzione reale e continua in un intervallo I (non necessariamente chiuso, né limitato) allora $f(I)$ è un intervallo.

Dal teorema di Weierstrass possiamo dedurre anche il seguente **COROLLARIO2:**

Sia $f: I =]a,b[\to \mathbb{R}$ (con f continua) e $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Allora esiste $\xi \in I : f(\xi) = \min f(I)$

oppure

Sia $f: I = (]a,b[) \to \mathbb{R}$ (con f continua in $]a,b[$) e $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$. Allora esiste $\xi \in I : f(\xi) = \max f(I)$

RIASSUMENDO IN SIMBOLI

TEOREMA DI WEIERSTRASS ①

$$f: I=[a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua in } I \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in I : \forall x \in [a,b] \; f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

TEOREMA SULL'ESISTENZA DEGLI ZERI ②

$$f: I=[a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua in } I,\ f(a)>0 \text{ e } f(b)<0 \text{ oppure } f(a)<0 \text{ e } f(b)>0 \Rightarrow \exists \xi \in I : f(\xi)=0$$

TEOREMA SUI VALORI INTERMEDI ③

$$f: I=[a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}, \exists \alpha, \beta : \forall x \in I \; m = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) = M$$

$$\Downarrow$$

$$f(I) = [m,M]$$