UNIFORME CONTINUITA' DI UNA FUNZIONE REALE

Ricordiamo brevemente la definizione di continuità in un intervallo I

$\forall\varepsilon>0, \forall x_0\in I\ \exists\delta>0: \forall x\in I: |x-x_0|<\delta\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

E' evidente che normalmente la scelta di δ è strettamente legata alla scelta di ε ed $x_0\in I$. Vi sono delle funzioni però che in certi intervalli hanno la caratteristica di permettere la scelta di δ indipendentemente dal punto $x_0\in I$.

DEFINIZIONE

Data una funzione $f: I\to\mathbb{R}$ diciamo che essa è uniformemente continua nell'intervallo I se, per ogni numero reale $\varepsilon>0$ esiste un $\delta>0$ tale che, se x' e $x''\in I$ e $|x'-x''|<\delta$ si ha che $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

f è uniformemente continua se $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x',x''\in I, |x'-x''|<\delta\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

E' quindi ovvio il seguente

TEOREMA 1: se $f: I\to\mathbb{R}$ è uniformemente continua in I, allora essa è continua in I.

Definiamo invece la negazione di funzione uniformemente continua

$f: I\to\mathbb{R}$ non è uniformemente continua se $\exists\varepsilon: \forall\delta>0\ \exists x',x''\in\mathbb{R}: |x'-x''|<\delta\ |f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$

negazione che risulta particolarmente utile nella dimostrazione del

TEOREMA DI CANTOR: Sia I un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e $f: I\to\mathbb{R}$ continua in I. Allora f è uniformemente continua in I. || NB

OSSERVAZIONE 1: il teorema di Cantor afferma una condizione sufficiente non necessaria. Una funzione può essere uniformemente continua anche se I è illimitato o aperto.

ESTENSIONE DEL TEOREMA A INTERVALLI APERTI E ILLIMITATI

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE IN INTERVALLI APERTI

Una funzione continua in un intervallo aperto $]a,b[$ è uniformemente continua in $]a,b[$ se e solo se esistono finiti $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE IN INTERVALLI ILLIMITATI

Una funzione continua in un intervallo illimitato è uniformemente continua se esiste finito il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (per intervalli illimitati superiormente) e se esiste finito il $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (per intervalli non limitati inferiormente).

OSSERVAZIONE 2: se gli intervalli sono del tipo $]a,+\infty[$ o $]-\infty,b[$ valgono per a e b le considerazioni fatte nel caso di intervalli aperti.

Può però anche accadere che il limite di una funzione per $x\to+\infty$ non sia finito ma che la funzione sia ugualmente uniformemente continua in un intervallo illimitato $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$, $]-\infty,+\infty[$ etc. Vale infatti il seguente

TEOREMA

Condizione sufficiente affinché una funzione sia uniformemente continua in un intervallo $[a,+\infty[$ è che essa sia continua in $[a,+\infty[$ e che esista

$\exists m\in\mathbb{R}: \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=k$ $[\lim_{x\to-\infty} f(x)-mx=k]$

ASINTOTI OBLIQUI ED ASINTOTI ORIZZONTALI

Si dice che la retta di equazione $y=l$ è asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ $[\lim_{x\to-\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}]$

Si dice che la retta di equazione $y=mx+k$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$ $[x\to-\infty]$ se $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=k$ $[\lim_{x\to-\infty} f(x)-mx=k]$