FUNZIONI INVERSE E LORO CONTINUITÀ

Dal teorema che afferma che l'immagine di un intervallo I secondo una funzione f continua in I è ancora un intervallo segue il seguente

TEOREMA 1: una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ continua in I può essere invertibile se e solo se essa è strettamente monotona.

Infatti dalla definizione di continuità otteniamo che, se I è un intervallo $\forall x_0 \in I \ \exists y_0 \in f(I): y_0 = f(x_0)$.

Mentre troviamo che tale y_0 è unico dalla definizione di funzione strettamente monotona,

infatti $x_0 > x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$ se f crescente

$\Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$ se f è decrescente

cioè $x_1 \neq x_0 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_0)$ pertanto fra I ed $f(I)$ vi è una corrispondenza biunivoca.

Possiamo inoltre enunciare la seguente

PROPOSIZIONE: se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e crescente [decrescente] in un intervallo, allora anche la sua inversa $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua e crescente [decrescente]

OSSERVAZIONE: mentre il grafico di una funzione è definito come l'insieme $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \in f(I)\}$ il grafico della funzione inversa è definito come l'insieme $G' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in f(I), y \in I\}$

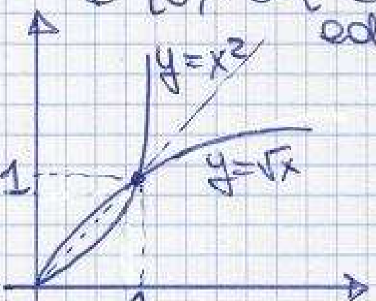
Si dice che G' è ortogonalmente simmetrico a G rispetto alla bisettrice del I e III quadrante, cioè rispetto alla retta di equazione $y = x$.

ESEMPI DI FUNZIONI INVERSE 1) $f(x) = x^2$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Essendo $f: I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non strettamente monotona nell'intervallo $]-\infty; +\infty[$ ne consideriamo l'intervallo $I = [0, +\infty[$ come dominio ed $f(I) = [0, +\infty[$

In I esiste anche $f^{-1}: f(I) \to I$, $f^{-1}: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ con $f(x) = \sqrt{x}$

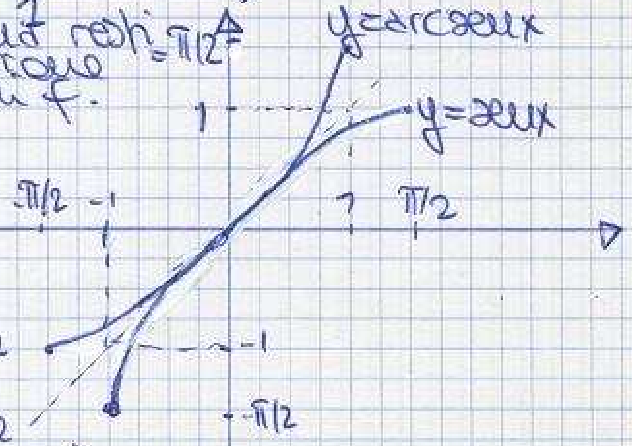
Anche $\sqrt{\ }$ è quindi continua e crescente in $f(I) = [0, +\infty[$



2) $f(x) = \operatorname{sen} x$ Anche per $f(x) = \operatorname{sen} x$ dobbiamo considerare una restrizione di f.

$f: I \to \mathbb{R}$ $I = [-\pi/2; +\pi/2]$ $f(I) = [-1; 1]$

$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$ $f^{-1}: [-1; 1] \to [-\pi/2; \pi/2]$



ATTENZIONE: la funzione arcsen x è detta anche "valore principale" di arcoseno ed i suoi valori solamente vanno compresi fra $-\pi/2$ e $\pi/2$. L'equazione $\operatorname{sen} x = \sqrt{2}/2$ ha per soluzione $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ma ciò non vuol dire che $\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{4} \cancel{+2k\pi}$: tale scrittura è un errore imperdonabile