# RELAZIONE D'ORDINE e INSIEMI ORDINATI



Una relazione $R \subseteq A \times A$ si dice **relazione d'ordine** se gode delle seguenti proprietà:

a) è antisimmetrica $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$ | $x > y \Rightarrow y \not> x$

b) è transitiva $(x,y),(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ | $x > y, y > z \Rightarrow x > z$

Un insieme si dice **totalmente ordinato** se oltre a godere delle proprietà A, B gode anche della proprietà seguente

c) $\forall (x,y) \in A \times A$ sussiste una sola delle 3 relazioni
$$\begin{cases} x > y \\ x < y \\ x = y \end{cases}$$

## MASSIMO, MINIMO, ESTREMO SUPERIORE ED ESTREMO INFERIORE

Supponiamo di avere un insieme A totalmente ordinato ed un insieme B incluso in A ($B \subset A$).

Un elemento $m \in B$ si dice massimo di B se, per ogni $x \in B$, risulta $x \leq m$

$$m = \max B \Leftrightarrow \exists !\, m \in B : \forall x \in B,\ x \leq m$$

Un elemento $\overline{m} \in B$ si dice minimo di B se, per ogni $x \in B$, risulta $x \geq \overline{m}$.

$$\overline{m} = \min B \Leftrightarrow \exists !\, \overline{m} \in B : \forall x \in B,\ x \geq \overline{m}.$$

Esistono insiemi però che pur essendo totalmente ordinati non possiedono né massimo né minimo.
ESEMPIO: l'insieme dei numeri razionali negativi:
$$\mathbb{Q}^- = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0\}$$

Introduciamo allora i concetti di minorante e maggiorante.

Continuando sempre a fare riferimento all'insieme totalmente ordinato A e ad suo sottoinsieme B diciamo che:

Un elemento $L \in A$ si chiama **maggiorante** di B se per ogni $x \in B$ risulta $x \leq L$

$$L \in A = \text{maggiorante di } B \Leftrightarrow \forall x \in B,\ x \leq L$$

Un insieme dotato di maggiorante si dice **superiormente limitato**.

Analogamente

$$L \in A = \text{minorante di } B \Leftrightarrow \forall x \in B,\ x \geq L$$

Un insieme dotato di minorante si dice **inferiormente limitato**

Si dice che $L \in A$ è **estremo superiore** di B se e solo se è il minimo dei maggioranti di B.

Supponendo di definire l'insieme

$$\mathcal{L} = \{L \in A : L = \text{maggiorante di } B\}$$

$$\sup B = \min \mathcal{L}$$

Si dice che $L \in A$ è **estremo inferiore** di B se e solo se è il massimo dei minoranti.

Supponendo $\overline{\mathcal{L}} = \{L \in A : L = \text{minorante di } B\}$ $\quad \inf B = \max \overline{\mathcal{L}}$