ANALISI MATEMATICA LEZIONE 15-10-18

DEFINIZIONE ASSIOMATICA DEL CAMPO DEI NUMERI REALI $\mathbb{R}$ 7

Vedremo ora che: il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$ è un campo ordinato rispetto dell'addizione, della moltiplicazione e dell'ordinamento naturale; il sistema dei numeri reali gode anche dell'assioma della completezza.

PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI RISPETTO ALLA SOMMA E AL PRODOTTO

Il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$ si definisce un campo rispetto della somma e del prodotto in quanto gode delle seguenti proprietà:

1) PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $\forall a,b\in\mathbb{R},\ a+b=b+a,\ a\cdot b=b\cdot a$

2) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ (a+b)+c=a+(b+c)$

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

3) ESISTENZA DEGLI ELEMENTI NEUTRI:

$$\exists\, 0,1\in\mathbb{R},\ 0\neq 1:\ \forall a\in\mathbb{R},\ a+0=a,\ a\cdot 1=a$$

Esistono elementi distinti 0 e 1 di $\mathbb{R}$ tali che, per ogni a di $\mathbb{R}$ si ha che $a+0=a$, $a\cdot 1=a$

4) ESISTENZA DEGLI OPPOSTI E DEGLI INVERSI:

$$\forall a\in\mathbb{R}\ \exists -a\in\mathbb{R}:\ a+(-a)=0$$

$$\forall a\in\mathbb{R}, a\neq 0, \exists\, a^{-1}\in\mathbb{R}:\ a\cdot a^{-1}=1$$

Per ogni a di $\mathbb{R}$ esiste un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con $-a$ tale che $a+(-a)=0$ e per ogni elemento a di $\mathbb{R}$, diverso da zero esiste un elemento di $\mathbb{R}$, indicato con a^{-1}, tale che $a\cdot a^{-1}=1$

5) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $\forall a,b,c\in\mathbb{R},\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Da queste proprietà che dimostrano che $\mathbb{R}$ è un corpo commutativo, seguono le regole dell'algebra elementare.

R_1 In $\mathbb{R}$ gli elementi indicati con 0 e 1 sono unici

R_2 $\forall a\in\mathbb{R}$ gli elementi $-a$ e a^{-1} sono unici

$$\forall a\in\mathbb{R}\ \exists!\, -a: a+(-a)=0 \quad \forall a\in\mathbb{R}\ \exists!\, a^{-1}: a\cdot a^{-1}=1$$

R_3 Dati $a,b\in\mathbb{R}$ l'equazione $x+a=b$ ammette una ed una sola soluzione data da $x=b+(-a)$ e per $a\neq 0$ l'equazione $y\cdot a=b$ ammette una ed una sola soluzione data da $y=b\cdot a^{-1}$

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\ \exists!\, x=b+(-a):\ x+a=b$$

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\ \exists!\, y=b\cdot a^{-1}:\ y\cdot a=b$$

R_4 $\forall a\in\mathbb{R},\ a\cdot 0=0$

R_5 $\forall a\in\mathbb{R},\ -(-a)=a$

R_6 $\forall a\in\mathbb{R},\ (-a)+(-b)=-(a+b)$

R_7 $\forall a\in\mathbb{R},\ (-a)\cdot b=-ab$

R_8 $\forall a\in\mathbb{R},\ (-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

R_9 Se $a\cdot b=0$ almeno uno degli elementi a, b deve essere nullo

R_{10} $\forall a,b\in\mathbb{R},\ (a\cdot b)^{-1}=a^{-1}\cdot b^{-1}$ se $a,b\neq 0$