PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI RISPETTO ALL'ORDINAMENTO NATURALE

ASSIOMA: Esiste un sottoinsieme $\mathbb{R}^+$ di $\mathbb{R}$ tale che:

A) $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a+b,\ a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

B) $\forall a \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti relazioni:

b') $a \in \mathbb{R}^+$

b'') $a = 0$

b''') $-a \in \mathbb{R}^+$

NOTA: Ovviamente $a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0$
$-a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a < 0$

Possiamo così definire, quindi, la relazione d'ordine:

$$a > b \text{ se } a - b \in \mathbb{R}^+$$

La relazione d'ordine così definita è una relazione d'ordine totale in $\mathbb{R}$ (che viene chiamato ordinamento naturale di $\mathbb{R}$) in quanto gode delle seguenti proprietà:

A) è transitiva: se $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$

infatti $(x-y)$ e $(y-z) \in \mathbb{R}^+$,
anche $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{R}^+$ per la cond. Ⓐ

B) è simmetrica:

$x > y \Rightarrow y \not> x$ infatti per la Ⓑ
$(x-y) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (y-x) = -(x-y) \notin \mathbb{R}^+$

C) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$ sussiste una sola delle 3 relazioni $\begin{cases} x > y \\ x = y \\ y > x \end{cases}$

Dalle proprietà finora elencate derivano tutte le regole dell'algebra in merito all'ordinamento naturale.

R_{11} $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$

R_{12} $a, b, c \in \mathbb{R},\ c > 0,\ a < b \Rightarrow ac < bc$

R_{13} $a \in \mathbb{R},\ a > 0 \Rightarrow -a < 0$

R_{14} $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$

R_{15} $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$

R_{16} $a \in \mathbb{R},\ a > 0 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a} > 0$

R_{17} $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0 \Rightarrow a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

LA FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

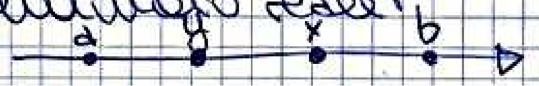
Per ogni numero reale x, definiamo $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

R_{18} $a \in \mathbb{R}^+$ dire che $|x| \leq a$ equivale a dire che $-a \leq x \leq a$

R_{19} $\forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

R_{20} $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R},\ a < b,\ a < x < b,\ a < y < b \Rightarrow |x - y| < b - a$

Il significato della R_{20} diventa palese se posizioniamo i punti a, b, x, y su una retta orientata dove ogni punto ha una corrispondenza biunivoca con un numero reale.



Se y e x sono compresi nel segmento ab la distanza fra x e y è minore di ab