9

Tutte le proprietà finora citate hanno la caratteristica di essere valide oltre che per l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, anche per l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Vediamo ora una proprietà che distingue il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$ dall'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$

ASSIOMA DELLA COMPLETEZZA

Ogni sottoinsieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, possiede un estremo superiore. || NB

Ciò non vale invece per tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$. Si può dimostrare che l'insieme A definito come

$A = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0,\ r^2 < 2\}$ è non vuoto, superiormente limitato, ma non è dotato di estremo superiore.

Dato che l'insieme A sarebbe dotato di estremo sup. se includessimo $\mathbb{R}$ possiamo quindi intuire l'esistenza di numeri reali non razionali.

L'analoga precedente, è speculare nel caso di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ inferiormente limitati e non vuoti, che saranno quindi certamente dotati di estremo inferiore.

INTERVALLI LIMITATI

Dati due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ i seguenti insiemi si indicano con le notazioni:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervallo aperto a destra (e chiuso a sinistra)

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervallo aperto a sinistra (e chiuso a destra)

IL SISTEMA ESTESO DEI NUMERI REALI

Il sistema esteso dei numeri reali $\overline{\mathbb{R}}$ consiste nel sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$ al quale sono stati aggiunti i seguenti simboli: $+\infty, -\infty$ con le proprietà:

a) se $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -\infty < x < +\infty$ e

$x + \infty = +\infty \qquad x - \infty = -\infty \qquad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$

b) se $x > 0 \Rightarrow x \cdot (+\infty) = +\infty \qquad x \cdot (-\infty) = -\infty$

c) se $x < 0 \Rightarrow x \cdot (+\infty) = -\infty \qquad x \cdot (-\infty) = +\infty$

INTERVALLI ILLIMITATI

Possiamo quindi definire le nozioni e le notazioni di intervalli illimitati. Dato $a \in \mathbb{R}$ abbiamo che:

$]a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \qquad]-\infty ; a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$[a ; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \qquad]-\infty ; a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[\qquad \overline{\mathbb{R}} = [-\infty ; +\infty]$