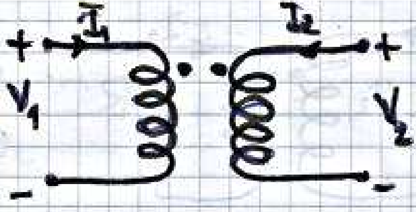
3) TRASFORMATORE IDEALE



Il trasformatore ideale è un elemento due-porte caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive

$$\begin{cases} V_2 = mV_1 \\ I_2 = -\frac{1}{m} I_1 \end{cases}$$

i pallini presenti nel simbolo stanno ad indicare che non è sufficiente che i versi di tensioni e correnti nelle singole porte siano coordinati, ma che anche la posizione reciproca delle porte sia quella indicata, altrimenti avremo delle inversioni di segno nelle equazioni.

È immediato verificare che

$$p(t) = V_1 I_1 + V_2 I_2 = V_1 I_1 + (mV_1)\left(-\frac{1}{m} I_1\right) = 0$$

: il trasformatore non assorbe potenza!!

Pertanto, pur rientrando nella categoria degli elementi passivi, è importante sottolineare che la potenza entrante nella I porta viene interamente trasferita alla seconda.

Il trasformatore è anche reciproco, infatti

$$V_1^{(1)} I_1^{(2)} + V_2^{(1)} I_2^{(2)} = V_1^{(1)} I_1^{(2)} + m V_1^{(1)}\left(-\frac{1}{m} I_1^{(2)}\right) = V_1^{(1)}\left(I_1^{(2)} - m \cdot \frac{1}{m} I_1^{(2)}\right) = 0$$

così come

$$V_1^{(2)} I_1^{(1)} + V_2^{(2)} I_2^{(1)} = V_1^{(2)}\left(I_1^{(2)} - m \frac{1}{m} I_1^{(2)}\right) = 0$$

quindi

$$\sum V_k^{(1)} I_k^{(2)} = \sum V_k^{(2)} I_k^{(1)}$$

Le proprietà fondamentali di un trasformatore ideale sono:

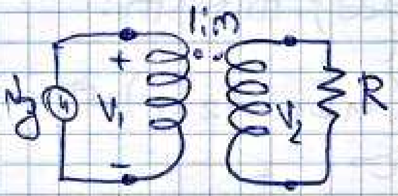
A) la capacità di cambiare grandezze elettriche passando da una porta all'altra

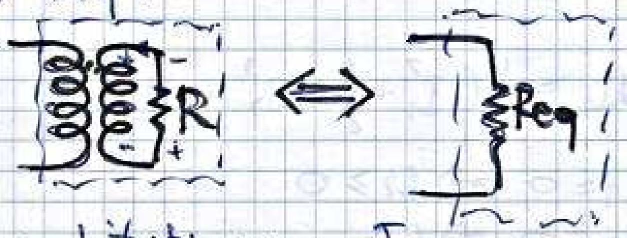
B) la capacità di alterare il livello degli elementi bipolari quando chiusi su una porta.

Riguardo al punto B) consideriamo l'esempio seguente

RESISTENZA EQUIVALENTE DI UN RESISTORE CHIUSO SU UNA PORTA DEL TRASFORMATORE IDEALE

Consideriamo il seguente circuito e supponiamo di voler calcolare la R_{eq}:





Prima di procedere ad uno studio quantitativo vogliamo chiederci se, intuitivamente, $R_{eq} > R$ oppure $R_{eq} < R$ ...

Basta considerare che, a parità di tensione applicata, su R scorre una corrente inferiore ed è applicata una tensione maggiore: dalla proporzionalità diretta con V ed inversa con I segue che $R = \frac{V_2}{I_2} > \frac{V_1}{I_1} = R_{eq}$

quantitativamente

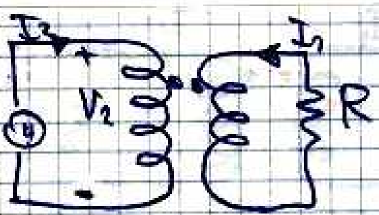
$$V_2 = mV_1 = mV_g$$

ed anche

$$V_2 = -RI_2 = +\frac{R}{m} I_1$$ cioè

$$V_g = \left(\frac{1}{m^2} R\right) I_1 \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{m^2} R$$

Ovviamente chiudendo R sul primario avvolgimento avremmo

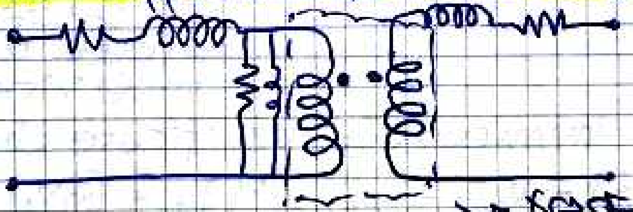


$V_2 = V_g = m V_1$ ed anche $V_1 = -R I_1 = +m R I_2$

$V_g = (m^2 R) I_2 \Rightarrow R_{eq} = m^2 R$

Per concludere notiamo che l'idealità del modello porta alla conclusione che, anche quando $V_g = V_0$ costante, avremmo comunque una tensione ed una corrente sull'avvolgimento secondario, cosa che sappiamo non valere nel trasformatore reale.

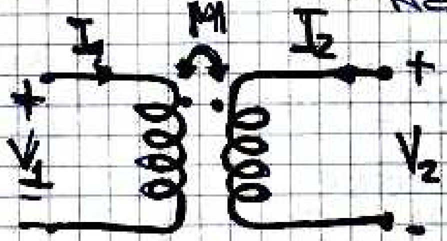
Un modello che si avvicina meglio al trasformatore magnetico reale è a titolo di esempio, il seguente:



Questo mostra ulteriormente come i componenti due porte ideali siano concepiti per creare circuiti equivalenti dei componenti reali e non per costruire il modello 1:1.

solo una parte del trasf. reale

4) INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



gli induttori mutuamente accoppiati sono un componente due-porte caratterizzato dalla seguente relazione costitutiva:

$$\begin{cases} V_1(t) = L_1 \dfrac{dI_1}{dt} + M \dfrac{dI_2}{dt} \\ V_2(t) = L_2 \dfrac{dI_2}{dt} + M \dfrac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

che, essendo di tipo integro-differenziale ci porta a concludere che il componente è con memoria.

le costanti L_1, L_2, M hanno le dimensioni di induttanze e vengono dette rispettivamente induttanze proprie e induttanza mutua (M).

le condizioni di passività sono un po' complicate da calcolare; infatti:

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{t} (V_1 I_1 + V_2 I_2)\, dt = \int_{-\infty}^{t} \left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}\right) I_1\, dt + \left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_1 \frac{dI_1}{dt}\right) I_2\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{t} L_1 I_1\, dI_1 + \int_{-\infty}^{t} L_2 I_2\, dI_2 + M \int_{-\infty}^{t} I_1\, dI_2 + I_2\, dI_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

imponendo che $\mathcal{E}(t) \geq 0 \quad \forall I_1, I_2$

$I_1 = 0 \Rightarrow L_2 \geq 0$

$I_2 = 0 \Rightarrow L_1 \geq 0$

mentre nel caso generale

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \left(1 + \frac{L_2}{L_1}\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 + 2\frac{M}{L_1} \frac{I_2}{I_1}\right)$$

ponendo $\frac{I_2}{I_1} = \mu$ il minimo del termine fra parentesi si ha per

$$\cancel{2}\frac{L_2}{\cancel{L_1}} \mu + \cancel{2}\frac{M}{\cancel{L_1}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \frac{\cancel{L_2}}{L_1} \frac{M^2}{L_2^{\cancel{2}}} - 2 \frac{M^2}{L_1 L_2} \geq 0$$

imponendo che $\Longleftarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = \mu = -\frac{M}{L_2}$

$$1 \geq \frac{M^2}{L_1 L_2} \Rightarrow |M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$