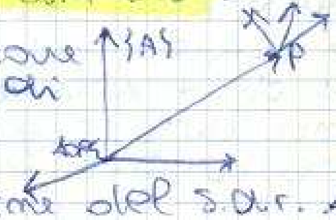
POSIZIONE ED ORIENTAMENTO di UN CORPO RIGIDO

Un corpo rigido è completamente caratterizzato quando sono noti l'origine e l'orientamento di una terna solidale con esso.



Detta P l'origine del sistema solidale, la posizione del corpo rigido è quindi descritta nel sistema di riferimento A dal vettore posizione

$^AP = P - P_{AORG}$ dove ovviamente AORG è l'origine del s.d.r. A.

Quando vogliamo descrivere ^AP rispetto ad una terna diversa, ad esempio B, lo indichiamo come $^B(^AP)$

Volendo ora descrivere l'orientamento della terna solidale B (e quindi del corpo rigido) possiamo esprimere i tre versori $\hat{X}_B$, $\hat{Y}_B$ e $\hat{Z}_B$ nella terna fissa A, abbiamo così la matrice di rotazione

$$^A_BR = \left[{^A\hat{X}_B}\ \ {^A\hat{Y}_B}\ \ {^A\hat{Z}_B}\right] = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

che viene anche detta matrice dei coseni direttori, essendo $\hat{X}_A \hat{Y}_B = \|\hat{X}_A\| \cdot \|\hat{Y}_B\| \cdot \cos\angle(\hat{X}_A, \hat{Y}_B)$ ma $\|\hat{X}_A\| = \|\hat{Y}_B\| = 1$

Notando che

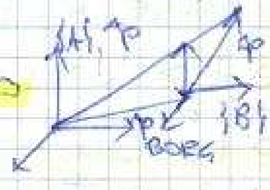
$[\hat{X}_B \hat{X}_A \quad \hat{Y}_B \hat{X}_A \quad \hat{Z}_B \hat{X}_A] = (^B\hat{X}_A)^T$ avremo che la matrice di rotazione della terna B alla terna A è $^A_BR = {^B_AR}^T$

Le matrici di rotazione sono ortonormali, ovvero $\det {^A_BR} = \pm 1$ (+1 se la terna è levogira, −1 se è destrogira) e soprattutto:

$(^A_BR)^{-1} = (^A_BR)^T = {^B_AR}$

TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

Volendo descrivere la posizione del punto P nel sistema di riferimento A, una volta nota la sua posizione nel sistema B, possiamo trovarci in 3 diverse situazioni



1) PURA TRASLAZIONE se le terne {B} ed {A} hanno lo stesso orientamento e sono solo traslate allora

$$^AP = {^BP} + {^AP_{BORG}} \qquad (1)$$

2) PURA ROTAZIONE se le origini dei due sistemi di riferimento coincidono ma i versori di B sono ruotati rispetto ad A secondo la matrice ^A_BR, allora

$$^AP = {^A_BR}\,{^BP} \qquad (2)$$

Per le matrici di rotazione vale una sorta di "semplificazione" degli indici che fa ricordare facilmente la (2): se ad esempio conoscessimo ^CP nel sistema C e fossero noti ^A_BR e ^B_CR, si avrebbe $^AP = {^A_BR}\,{^B_CR}\,{^CP}$. Particolarmente interessante è esplicitare le matrici di rotazione attorno agli assi cartesiani

$$R_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \quad R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \quad R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) ROTOTRASLAZIONE La trasformazione di coordinate più generale è data dalla composizione di una traslazione e di una rotazione

$$\boxed{{}^A p = {}^A p_{BORG} + {}^A_B R\,{}^B p} \quad (3)$$

SVANTAGGI DELLA NOTAZIONE CONVENZIONALE E NOTAZIONE OMOGENEA

le matrici di rotazione hanno il vantaggio che la composizione di + rotazioni successive, ad esempio per il passaggio da una terna C ad una B e quindi ad una A tutte con origini sovrapposte, si traduce in un semplice prodotto fra matrici:

$^A p = {}^A_B R\,{}^B_C R\,{}^C p$ Quando invece è presente anche una traslazione fra le origini, tanti più sono i sistemi di riferimento per cui si passa tanto più si complica l'espressione del vettore posizione nella terna "finale":

$$^A p = {}^A p_{BORG} + {}^A_B R\left({}^B p_{CORG} + {}^B_C R\,{}^C p\right) = {}^A p_{BORG} + {}^A_B R\,{}^B p_{CORG} + {}^A_B R\,{}^B_C R\,{}^C p \quad (*)$$

Questo è dovuto in ultima analisi alla diversa rappresentazione delle due trasformazioni elementari:

- la rotazione è descritta da una matrice ($^B_A R$)
- la traslazione è descritta da un vettore ($^A p_{BORG}$)

descrivendo il vettore posizione con 4 componenti invece di 3

$^A p_{OM} = \begin{bmatrix} {}^A p_{ce} \\ 1 \end{bmatrix}$ è possibile superare questo dualismo ed esprimere anche le traslazioni con una matrice.

la (3) si può infatti scrivere come $\begin{bmatrix} {}^A p \\ 1 \end{bmatrix} = {}^A_B T \begin{bmatrix} {}^B p \\ 1 \end{bmatrix}$ dove ${}^A_B T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B R & & {}^A p_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

il vettore a 4 componenti $\begin{bmatrix} {}^A p \\ 1 \end{bmatrix}$ viene detto rappresentazione omogenea del vettore $^A p$, mentre $^A_B T$ viene detta **matrice di trasformazione omogenea**

La pura traslazione sarà indicata da una matrice ${}^A_B T = \left[\begin{array}{ccc|c} & I & & {}^A p_{BORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

mentre la pura rotazione sarà ${}^A_B T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B R & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

La fondamentale importanza delle matrici di trasformazione omogenee è data dal fatto che il passaggio fra sistemi di riferimento diversi dà luogo ad un prodotto come nelle matrici di rotazione in notazione classica:

$^A_C T = {}^A_B T\,{}^B_C T$ Lo studio della cinematica dei robot seriali è infatti impregnato sul cambiamento di coordinate fra una successione di sistemi di riferimento solidali ai giunti del robot stesso.

Come nelle matrici di rotazione "classiche" il passaggio inverso è descritto da una matrice $^B_A T = {}^A_B T^{-1}$

Non trattandosi in generale di matrici ortonormali, non si ha che ${}^A_B T^{-1} = {}^A_B T^T$; tuttavia questo non è un gran problema dal punto di vista computazionale perché è sufficiente

- invertire (e quindi trasporre) la matrice di rotazione interna
- fare l'opposto del vettore posizione $^A p_{BORG}$.

In altre parole ${}^B_A T = {}^A_B T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} {}^A_B R^T & -{}^A_B R^T\,{}^A p_{BORG} \\ \hline \end{array}\right]$