CINEMATICA DI VELOCITA' DI ALCUNE STRUTTURE TIPICHE

1) ROBOT 2R

Se siamo interessati al solo posizionamento nel piano $\dot{x}_e = \begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \end{bmatrix}$ ed è presente solo la velocità lineare, pertanto jacobiano geometrico e jacobiano analitico coincidono.

Calcoliamolo derivando le equazioni $x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1+\theta_2)$, $y = l_1 s\theta_1 + l_2 s(\theta_1+\theta_2)$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot x = -l_1 s\theta_1 \dot\theta_1 - l_2 s(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1 - l_2 s(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_2 \\ \dot y = l_1 c\theta_1 \dot\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_1 + l_2 c(\theta_1+\theta_2)\dot\theta_2 \end{cases}$$

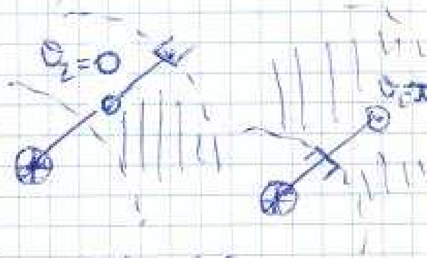
che scritte in forma matriciale diventano:

$$\begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix}$$

da cui $J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$

da cui $\det J(\theta) = -l_2 c_{12} l_1 s_1 - \cancel{l_2^2 s_{12} c_{12}} + l_1 c_1 l_2 s_{12} + \cancel{l_2^2 s_{12} c_{12}} = l_1 l_2 (c_1 s_{12} - s_1 c_{12}) = l_1 l_2 s(\cancel{\theta_1} + \theta_2 - \cancel{\theta_1}) = l_1 l_2 s_2$

Sono punti singolari tutti quelli per cui $\theta_2 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ ovvero, ricordando che lo spazio di lavoro è una corona circolare di raggi $l_1 + l_2$ ed $l_1 - l_2$, tutti i punti di confine dello spazio di lavoro



Per tutti i punti in cui $\theta_2 \neq 0, \pi$ è possibile risolvere il problema cinematico inverso di velocità:

$$\begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{bmatrix} = \dot q = \frac{1}{l_1 l_2 s_2} \begin{bmatrix} l_1 c_{12} & l_2 s_{12} \\ -l_1 c_1 - l_2 c_{12} & -l_1 s_1 - l_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

2) MANIPOLATORE SFERICO

Derivando x, y, z otteniamo

$$\dot x = \dot d_3 c_1 s_2 + d_3 c_2 c_1 \dot\theta_2 - d_3 s_2 s_1 \dot\theta_1 - l_2 c_1 \dot\theta_1$$
$$\dot y = \dot d_3 s_1 s_2 + d_3 c_1 s_2 \dot\theta_1 + d_3 s_1 c_2 \dot\theta_2 - l_2 s_1 \dot\theta_1$$
$$\dot z = -d_3 s_2 \dot\theta_2$$

cioè

$$\begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_3 s_2 s_1 - l_2 c_1 & d_3 c_2 c_1 & c_1 s_2 \\ d_3 c_1 s_2 - l_2 s_1 & d_3 s_1 c_2 & s_1 s_2 \\ 0 & -d_3 s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \\ \dot d_3 \end{bmatrix}$$

perciò il determinante dello jacobiano vale $-d_3 s_2 (-d_3 s_2^2) = d_3^2 s_2^3$

e le singolarità si hanno per

$d_3 = 0 \quad \theta_2 = 0, \pi$

3) MANIPOLATORE ANTROPOMORFO Deriviamo le eq. di posizione:

$$\dot{x} = -s_1(\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23})\dot{\vartheta}_1 + c_1[-\ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_2 - \ell_3 s_{23}(\dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_3)]$$
$$\dot{y} = c_1(\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23})\dot{\vartheta}_1 + s_1[-\ell_2 s_2 \dot{\vartheta}_2 - \ell_3 s_{23}(\dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_3)]$$
$$\dot{z} = \ell_2 c_2 \dot{\vartheta}_2 + \ell_3 c_{23}(\dot{\vartheta}_2 + \dot{\vartheta}_3)$$

che espresse in forma matriciale diventano:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1\ell_2 c_2 - s_1 c_{23}\ell_3 & -s_2 c_1 \ell_2 - s_{23} c_1 \ell_3 & -s_{23} c_1 \ell_3 \\ c_1 \ell_2 c_2 + c_1 c_{23} \ell_3 & -s_1 s_2 \ell_2 - s_{23} s_1 \ell_3 & -s_{23} s_1 \ell_3 \\ 0 & \ell_2 c_2 + c_{23}\ell_3 & \ell_3 c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \\ \dot{\vartheta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\det J(\dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2, \dot{\vartheta}_3) = \ell_2(\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23})\ell_3[s_2 c_{23} - c_2 s_{23}] = -\ell_2 \ell_3 s_3(\ell_2 c_2 + \ell_3 c_{23})$$

le singolarità si hanno quindi per $\vartheta_3 = 0, \pi$ e per $\ell_2 \cos\vartheta_2 + \ell_3 \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) = 0$

cioè $\ell_2 c_2 + \ell_3 c_2 c_3 - \ell_2 s_2 s_3 = 0$