ANALISI DI ACCELERAZIONE

Così come abbiamo definito la velocità lineare di un punto Q e la velocità angolare di un corpo (noi vista dalla terna {B} ad esso solidale), possiamo con delle semplici derivazioni definire:

1) l'accelerazione lineare del punto Q: ${}^A\dot V_Q = \frac{d}{dt}{}^A V_Q$

ricordando l'espressione ${}^A V_Q = {}^A V_{BORG} + {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q + {}^A_B R\,{}^B V_Q$ avremo che

$${}^A\dot V_Q = {}^A\dot V_{BORG} + \frac{d}{dt}({}^A_B R\,{}^B V_Q) + {}^A\dot\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q + {}^A\Omega_B \wedge \frac{d}{dt}({}^A_B R\,{}^B Q)$$

A questo punto calcoliamo le derivate

$\frac{d}{dt}({}^A_B R\,Q_B) = {}^A_B R\,{}^B V_Q + {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q$ per la (*) di pag 8 e analogamente

$\frac{d}{dt}({}^A_B R\,{}^B V_Q) = {}^A_B R\,{}^B\dot V_Q + {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B V_Q$ perciò

$${}^A\dot V_Q = {}^A\dot V_{BORG} + {}^A_B R\,{}^B\dot V_Q + {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B V_Q + {}^A\dot\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q + {}^A\Omega_B \wedge [{}^A_B R\,{}^B V_Q + {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q] =$$

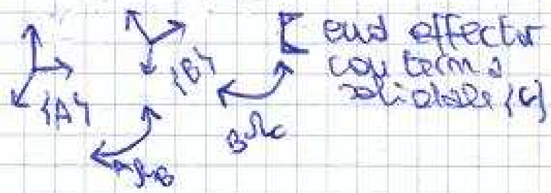
$$= {}^A\dot V_{BORG} + {}^A_B R\,{}^B\dot V_Q + 2\,{}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B V_Q + {}^A\dot\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q + {}^A\Omega_B \wedge {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q \quad (1)$$ in cui

- ${}^A_B R\,{}^B\dot V_Q$ è l'**accelerazione relativa**
- $2\,{}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B V_Q$ è l'**accelerazione di Coriolis**
- ${}^A\dot V_{BORG} + {}^A\dot\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q + {}^A\Omega_B \wedge {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q$ è l'**accelerazione di trascinamento** data a sua volta da 3 termini:
  - ${}^A\dot V_{BORG}$ cioè l'accelerazione della terna solidale al corpo
  - ${}^A\dot\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q$ dovuta alla velocità angolare ${}^A\Omega_B$
  - ${}^A\Omega_B \wedge {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B Q$ che è l'accelerazione **centripeta**.

2) l'accelerazione angolare ${}^A\dot\Omega_B = \frac{d}{dt}({}^A\Omega_B)$

anche per l'accelerazione angolare si considera la composizione passando per una sequenza di sistemi di riferimento, come capita nei robot seriali.

Consideriamo infatti la seguente situazione



Dalla regola di composizione delle velocità angolari (B) di pag 8B:

${}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A_B R\,{}^B\Omega_C$ otteniamo per derivazione che

${}^A\dot\Omega_C = {}^A\dot\Omega_B + \frac{d}{dt}({}^A_B R\,{}^B\Omega_C)$. abbiamo visto come si deriva un vettore premoltiplicato per una matrice di rotazione

$\frac{d}{dt}({}^A_B R\,{}^B\Omega_C) = {}^A_B R\,{}^B\dot\Omega_C + {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B\Omega_C$ quindi

$${}^A\dot\Omega_C = {}^A\dot\Omega_B + {}^A_B R\,{}^B\dot\Omega_C + {}^A\Omega_B \wedge {}^A_B R\,{}^B\Omega_C$$

ANALISI DIRETTA DI ACCELERAZIONE CON ALGORITMO di LUH-WALKER-PAUL

Come per l'analisi diretta di velocità un metodo possibile per conoscere l'accelerazione di tutti i membri, note le θ_i e le d_i, consiste nel partire dal telaio e calcolare di volta in volta l'accelerazione del link successivo.

1) giunto **prismatico**: ricordiamo che si aveva conservazione delle velocità angolari a meno di un cambio di coordinate:

$$\omega_i = \omega_{i+1} \Rightarrow \omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, \omega_i$$ e quindi anche le accelerazioni sono le stesse:

$$^{i+1}\dot{\omega} = {}_{i+1}R\, \dot{\omega}_i$$

Per la velocità lineare si aveva invece $^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, v_i + {}^{i}\omega_i \wedge {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i}P_{i+1} + \dot{d}_{i+1}\, {}^{i}_{i+1}R\, {}^{i}\hat{z}_i$ in cui possiamo riconoscere la trasformazione della velocità nel caso di roto-traslazione fra le due terne:

$$^{A}V_Q = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}\Omega_B \wedge {}^{A}_{B}R\, {}^{B}Q + {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V_Q$$ che abbiamo già derivato nella pagina precedente, pertanto

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left[{}^{i}\dot{v}_i + \ddot{d}_{i+1}\, {}^{i}\hat{z}_i + {}^{i}\dot{\omega}_i \wedge {}^{i}P_{i+1} + 2\, {}^{i}\omega_i \wedge \dot{d}_{i+1}\, {}^{i}\hat{z}_i + {}^{i}\omega_i \wedge ({}^{i}\omega_i \wedge {}^{i}P_{i+1})\right]$$

2) giunto **rotoidale**: le velocità angolari si sommano a meno di un cambio di coordinate $^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R(\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i}\hat{z}_i)$

quindi $\dot{\omega}_{i+1} = \dot{\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1}\hat{z}_i + \omega_i \wedge \dot{\theta}_{i+1}\hat{z}_i$

che espresso nelle coordinate $i+1$ diventa

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i}_{i+1}R({}^{i}\dot{\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1}\, {}^{i}\hat{z}_i + {}^{i}\omega_i \wedge \dot{\theta}_{i+1}\, {}^{i}\hat{z}_i)$$

Per la velocità lineare si ha $v_{i+1} = v_i + \omega_i \wedge P_{i+1}$ ovvero si può applicare la trasformazione dell'accelerazione lineare (1) in cui però $^{A}V_{BORG} = 0$ e $^{B}V_Q = 0$, perché le due terne non sono in traslazione relativa, pertanto:

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}\dot{v}_i + {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \wedge {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}P_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \wedge {}^{i+1}\omega_{i+1} \wedge {}^{i+1}_{i}R\, {}^{i}P_{i+1}$$

ovviamente gli svantaggi dell'algoritmo di Luh-Walker-Paul sono gli stessi visti per la velocità, primo fra tutti la limitazione alla sola analisi diretta.

ANALISI DIRETTA-INVERSA CON LO JACOBIANO

Se è noto lo jacobiano l'analisi di accelerazione diretta si risolve semplicemente derivando l'espressione $\dot{X} = J(Q)\dot{Q}$, ottenendo

$$\ddot{X} = J(Q)\ddot{Q} + \dot{J}(Q,\dot{Q})\dot{Q}$$ Notando che $J(Q)\ddot{Q} = \ddot{X} - \dot{J}\dot{Q}$, la condizione per l'esistenza di una sola soluzione al problema inverso è che esista $J^{-1}(Q)$. In tal caso

$$\ddot{Q} = J^{-1}\ddot{X} - J^{-1}\dot{J}\dot{Q}$$

Ne segue che le singolarità per l'analisi di accelerazione sono le stesse trovate nell'analisi di velocità