STATICA

La statica è quella disciplina che studia le coppie e le forze sui giunti quando il robot è in equilibrio. Ha diverse applicazioni:

1) calcolo delle coppie (x giunti rotoidali) e delle forze (x giunti prismatici) che i giunti devono sviluppare per mantenere il robot fermo in una data posizione

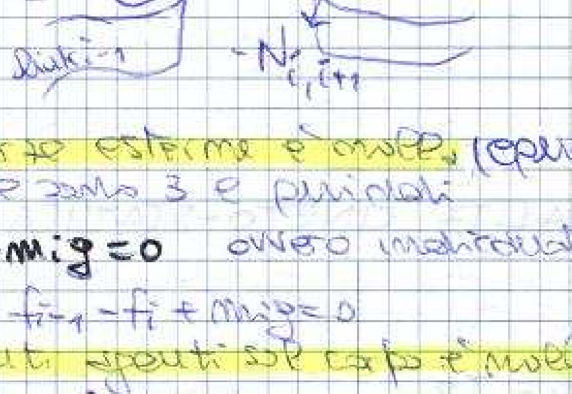
2) calcolo delle coppie e delle forze di giunto dovute ad una data sollecitazione sul terminale (sollevamento di un peso, contatto con una superficie, ecc); in questo modo si dimensiona la struttura meccanica e gli attuatori.

Gli approcci che, data la forza F_n agente sull'end effector e il momento N_n permettono di ricavare le coppie generalizzate di giunti $\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$ sono:

1) metodo di Newton-Eulero
2) metodo dei lavori virtuali

Notiamo che, pur indicando con τ_i le sue componenti, il vettore τ racchiude sia forze che coppie

- se infatti il giunto i è rotoidale, il motore i-esimo montato su di esso da luogo alla coppia $\tau_i = N_{i-1} \cdot \hat{z}_{i-1}$
- se invece il giunto i è prismatico allora il motore sviluppa la forza $\tau_i = f_{i-1} \cdot \hat{z}_{i-1}$



APPROCCIO di NEWTON-EULERO

Si basa sulle equazioni che dicono che se un corpo rigido è in equilibrio (nel nostro caso il link i) allora

1) $R^{(e)} = 0$ ovvero la risultante delle forze esterne è nulla (equazione di Newton); nel nostro caso le forze sono 3 e quindi l'equazione diventa
$$f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + m_i g = 0$$
ovvero indicando solo il membro su cui giacciono le forze $f_{i-1} - f_i + m_i g = 0$

2) $N^{(e)} = 0$ ovvero la risultante dei momenti agenti sul corpo è nulla (equazione di Eulero)
$$N_{i-1} - N_i + {}^{i-1}r_{c_i} \wedge f_{i-1} + (-{}^{i}r_{c_i}) \wedge f_i = 0$$

Impostando queste 2n equazioni è possibile risolvere le 2n incognite se è nota l'interazione dell'ultimo corpo con l'ambiente, ovvero $f_{n+1} = -f_n$ ed $N_{n+1} = -N_n$.

Se si è interessati a mantenere il robot in equilibrio ci sono molti calcoli non necessari, in quanto è già noto l'intero vettore delle forze generalizzate $F = \begin{bmatrix} f_n \\ N_n \end{bmatrix}$ mentre si è interessati al solo vettore delle coppie di giunti

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \hat{z}_0 \\ N_2 \hat{z}_1 \\ \vdots \\ f_n \hat{z}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to P \\ \to R \\ \\ \to P \end{matrix}$$

In tal caso conviene quindi passare al metodo dei lavori virtuali

APPROCCIO DEI LAVORI VIRTUALI

Gli spostamenti virtuali sono spostamenti infinitesimi e arbitrari compatibili con i vincoli geometrici del manipolatore (che è un sistema meccanico con vincoli olonomi e indipendenti dal tempo).

Sono spostamenti virtuali dq_i, dx_e e $d\phi_e$ rispettivamente per il giunto i-esimo per la posizione dell'end effector e per la sua orientamento: essi non devono soddisfare alcuna legge del moto ma solo i vincoli del sistema meccanico.

Sono invece spostamenti reali (infinitesimi) dp per il terminale e dq per i giunti: questi sono soggetti alla legge di Newton per il moto.

Entrambi sono legati dallo jacobiano geometrico, in quanto

$$\dot{p} = J\dot{q} \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = J\frac{dq}{dt} \Rightarrow dp = \begin{bmatrix} dx_e \\ d\phi_e \end{bmatrix} = J\,dq$$ e allo stesso modo

$dp = J dq$. Se andiamo a calcolare il lavoro virtuale compiuto dalle forze e dai momenti per gli spostamenti dq_i, dx_e, $d\phi_e$ avremo

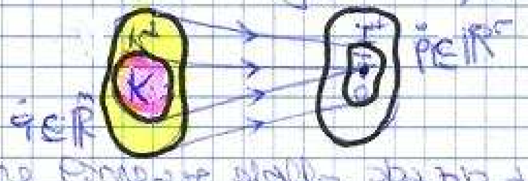
$$dW = \tau_1 dq_1 + \ldots + \tau_n dq_n + f_{n+1} dx_e + N_{n+1} d\phi_e = \tau^T dq - f_n dx_e - N_n d\phi_e$$

Definendo quindi $F = \begin{bmatrix} f_n \\ N_n \end{bmatrix}$ avremo $dW = \tau^T dq - F^T dp = \tau^T dq - F^T J dq$

A questo punto non rimane che enunciare il principio dei lavori virtuali: il sistema meccanico è in equilibrio se e solo se il lavoro virtuale si annulla per qualsiasi spostamento virtuale

$$dW = (\tau^T - F^T J) dq = 0 \quad \forall dq \Rightarrow \tau^T = F^T J \Rightarrow \boxed{\tau = J^T F}$$

mediante la quale ricaviamo le coppie ai giunti necessarie per produrre, in assenza di attrito e senza considerare la gravità, l'azione $F = \begin{bmatrix} f_n \\ N_n \end{bmatrix}$ sull'organo terminale.



DUALITÀ CINETO-STATICA

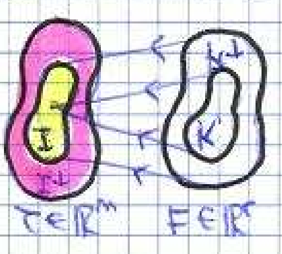
Lo jacobiano caratterizza la trasformazione lineare dallo spazio delle velocità dei giunti a quello delle velocità dell'organo terminale poiché

$\dot{p} = J\dot{q}$ e si hanno quindi le proprietà mostrate in fig. 1:

- $Im(J) \in \mathbb{R}^r$ è l'insieme delle velocità $\dot{p}$ dell'end-effector che possono essere ottenute con opportune velocità dei giunti $\dot{q}$
- $Kernel(J) \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme delle velocità di giunto che danno luogo a velocità nulla per l'end-effector

La relazione $\tau = J^T F$ ci dice invece che:

- $Im(J^T)$ è l'insieme delle coppie ai giunti τ che data una qualsiasi forza al terminale, sono in grado di bilanciarla
- $Kernel(J^T)$ è l'insieme di forze sul terminale che possono essere bilanciate con coppie nulle.



L'algebra lineare ci dice che $K(J) = I(J^T)^\perp$ e $I(J) = K(J^T)^\perp$

per cui un manipolatore in configurazione singolare resta nella posizione assegnata se gli applichiamo una forza generalizzata $F \in K(J^T)$