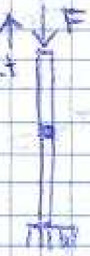
Si consideri ad esempio un 2R in configurazione singolare ($J = J(q)$ e $J^T = J^T(q)$ quindi i ragionamenti precedenti valgono istante per istante, in base alla configurazione $q(t)$ del robot nello spazio dei giunti):



Se prendiamo la direzione lungo la quale il robot non può sviluppare velocità e applichiamo una forza proprio in quella direzione, qualsiasi sia il modulo della forza il robot può rimanere in tale posizione con coppie τ_1 e τ_2 nulle!

Tale direzione è infatti $\mathrm{Im}(J)^{\perp}$ = le velocità che non possono essere raggiunte con alcun valore di $\dot{q}$; ma per l'algebra lineare $\mathrm{Im}(J)^{\perp} = \mathcal{K}(J^T)$ cioè l'insieme delle forze sul terminale che può essere bilanciato con coppia nulla.

ANALISI DI CEDEVOLEZZA DI UN MANIPOLATORE

Le matrici J e J^T definite per la cinematica differenziale e per la statica svolgono un ruolo molto importante anche nello studio della **rigidezza del manipolatore**, che è una qualità positiva contrapposta della **cedevolezza**, che è una qualità negativa.

La cedevolezza si misura nella deflessione Δq cui è sottoposto un giunto quando su di esso è applicata una coppia (o una forza) τ_i:

$\tau_i = k_i \Delta q_i$ Raccogliendo le costanti elastiche in una matrice diagonale

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{bmatrix}$$

possiamo scrivere $\boxed{\tau = K \Delta Q}$ dove $\Delta Q = \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{bmatrix}$

K viene detta matrice di rigidezza dei giunti, mentre la sua inversa (che esiste perché nessuno dei k_i sia nullo) è matrice di cedevolezza dei giunti:

$$\Delta Q = K^{-1} \tau = C \tau$$

Volendo conoscere gli effetti sulle variabili dello spazio di lavoro delle deflessioni Δq_i dei giunti bisogna conoscere lo Jacobiano:

$$\dot{x} = J \dot{q} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = J \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = J K^{-1} \tau$$

Infine volendo attribuire le coppie da applicare ai giunti alle interazioni dell'end-effector con l'ambiente non resta che ricorrere alla relazione statica $\tau = J^T F$; $\Delta X = J K^{-1} \tau = J K^{-1} J^T F$

dove la matrice $C = J K^{-1} J^T$ viene detta matrice di cedevolezza del terminale : $\Delta X = C F$

ELLISSOIDI DI MANIPOLABILITÀ

Consideriamo l'equazione di una sfera nello spazio delle coppie di giunti

$$\tau^T \tau = 1$$

Se vogliamo sapere come viene trasformata questa sfera nello spazio delle forze sul terminale, basta che consideriamo la relazione

$\tau = J^T F$ da cui $F^T J J^T F = 1$ (*)

$n=2$

La (*) è l'equazione di un ellissoide che costituisce un indice di valutazione per le prestazioni del manipolatore:
nella direzione dell'asse maggiore il terminale può esercitare la forza massima mentre nella direzione dell'asse minore la forza che può esercitare è minima.

La situazione ideale è una sfera (isotropia della forza) mentre quella peggiore si ha nei punti singolari; nel caso di $n=2$ l'ellisse si riduce a un segmento

Questa proprietà nei punti singolari non è casuale ma deriva dalla dualità cineto-statica ($v = J\dot{q}$)
considerando infatti la sfera $\dot{q}^T \dot{q}$ nello spazio delle velocità di giunto, essa viene trasformata nello spazio delle velocità del terminale nell'ellissoide $v^T J^{-T} J^{-1} v = 1$

in cui la matrice dei coefficienti è l'inversa di quella dell'ellissoide di forza

nella direzione lungo la quale la forza è massima la velocità è minima e viceversa