DINAMICA DI UN MANIPOLATORE

Il modello dinamico di un robot mette in relazione le coppie τ sviluppate ai giunti con il moto della struttura, cioè con le grandezze $\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$ che caratterizzano la traiettoria del manipolatore.

Pertanto, come per l'analisi cinematica, possiamo individuare i due problemi fondamentali:

1) **problema dinamico diretto**, che consiste nel determinare il movimento del manipolatore $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ una volta note le coppie applicate ai giunti τ

2) **problema dinamico inverso**, che consiste nel determinare le coppie τ necessarie a compiere una determinata traiettoria (cioè sono note $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$).

Noi proveremo due diversi approcci per il calcolo del modello dinamico:

- quello di Newton-Eulero che parte dall'impostazione delle equazioni cardinali della dinamica per ciascun giunto e, attraverso l'eliminazione delle reazioni vincolari, arriva a delle equazioni che legano le $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$

- quello di Lagrange, che valutando energia potenziale ed energia cinetica dei singoli giunti perviene ad una relazione in forma chiusa:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q)$$

Comprendiamo quindi come

1) nel problema dinamico inverso si tratta "semplicemente" di sostituire $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ e valutare τ.

Non è però una questione così banale, bisogna distinguere lo scopo per il quale si risolve il problema inverso:

- in fase di progetto per dimensionare gli attuatori in base alle coppie che dovranno sviluppare; in questo caso si è offline e i tempi di calcolo sono una variabile trascurabile

- per il controllo in tempo reale del manipolatore in modo da imporre le coppie τ che permettano di seguire la traiettoria desiderata; è evidente che in questo caso i tempi di calcolo devono rispettare vincoli molto rigidi (controllo real time) onde pregiudicare la possibilità di controllo a partire dal modello dinamico.

2) nel problema dinamico diretto si tratta di risolvere equazioni differenziali non ordinarie e ciò è possibile solo con complicati algoritmi numerici

Non si hanno tuttavia limiti di tempo, perché la soluzione della dinamica inversa si ha solitamente nei problemi di simulazione dei robot.

Il pacchetto di simulazione comprende quindi anche gli algoritmi di integrazione delle equazioni differenziali.

APPROCCIO di LAGRANGE

Ricordiamo dalla meccanica razionale che le equazioni di Lagrange permettono di ricavare le equazioni del moto di un sistema con n gradi di libertà risolvendo le equazioni:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i \quad \left[\text{ovvero } \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ldots\right.$$

- $q_1 \ldots q_n$ sono un insieme di variabili scelte in modo da poter individuare in modo univoco la configurazione del sistema: vengono dette **coordinate generalizzate** e nel nostro caso è particolarmente utile identificarle con le variabili di giunto.

  $q_i = \vartheta_i$ se il giunto i è rotoidale

  $q_i = d_i$ se il giunto i è prismatico

- $\mathcal{L} = T - U$ è la **Lagrangiana**, ha le dimensioni di un'energia in quanto differenza fra:
  - l'energia cinetica T
  - l'energia potenziale U

- Q_i è la **forza generalizzata** non conservativa associata alla coordinata generalizzata q_i; nel nostro caso la forza generalizzata è data da due contributi:
  - la coppia τ sviluppata dal giunto
  - $J^T F$: la coppia dovuta alla forza F di interazione fra end effector ed ambiente.

Per particolareggiare le equazioni di Lagrange al caso dei robot bisogna quindi saper calcolare energia cinetica ed energia potenziale e passare quindi alle derivazioni.

ENERGIA CINETICA

Detta v_{Ci} la velocità lineare del baricentro del link i-esimo e ω_i la sua velocità angolare, l'energia cinetica del link vale

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^T v_{Ci} + \frac{1}{2}\omega_i^T I_i \omega_i$$ dove I_i è il tensore d'inerzia (matrice) del braccio i relativo al proprio baricentro.

L'energia cinetica complessiva sarà quindi

$T = \sum_{i=1}^{n} T_i$ che dovrà essere derivata rispetto alle q_i; è necessario esprimere quindi le v_i e le ω_i in termini di tali coordinate generalizzate.

Ricordando quanto detto parlando dello jacobiano geometrico

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} v_e \\ \omega_e \end{bmatrix} = J\dot{q} = \begin{bmatrix} J_{l1} & \ldots & J_{ln} \\ J_{a1} & \ldots & J_{an} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$ avremo che $v_{Ci} = J_{l1}^i \dot{q}_1 + \ldots + J_{ln}^i \dot{q}_n = J_l^i \dot{q}$

$$\omega_i = J_{a1}^i \dot{q}_1 + \ldots + J_{an}^i \dot{q}_n = J_a^i \dot{q}$$

Pertanto

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (J_l^i \dot{q})^T (\dot{q} J_l^i) + \frac{1}{2}(J_a^i \dot{q})^T I_i (J_a^i \dot{q}) = \frac{1}{2} m_i \dot{q}^T J_l^{iT} J_l^i \dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T J_a^{iT} I_i J_a^i \dot{q}$$

$$= \dot{q}^T \left(\frac{1}{2} m_i J_l^{iT} J_l^i + \frac{1}{2} J_a^{iT} I_i J_a^i\right)\dot{q}$$ Definendo la matrice H simmetrica e definita positiva $H = \sum\left(\frac{1}{2} m_i J_l^{iT} J_l^i + \frac{1}{2} J_a^{iT} I_i J_a^i\right)$ possiamo scrivere ...