che $T=\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T H \dot{q} = \sum_i \sum_j H_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ che è quindi una forma quadratica definita positiva nelle variabili $\dot{q}_i$. (13)

Notiamo inoltre che in generale $H_{ij} = H_{ij}(q)$ ovvero la matrice H dipende dalla configurazione assunta dal robot.

ENERGIA POTENZIALE

Facendo riferimento al sistema di riferimento fisso sul telaio (terna base) l'altezza del baricentro del link i si può scrivere come

$g^T\,{}^0r_{ci}$ dove
- g^T è il vettore gravità nel riferimento base.
- ${}^0r_{ci}$ è il vettore posizione del baricentro in tale riferimento.

In altre parole, se l'asse verticale nella terna base è l'asse z, avremo $g^T=\begin{bmatrix}0\\0\\-g\end{bmatrix}$ in modo che il prodotto scalare $g^T\,{}^0r_{ci}$ restituisce

$$-g({}^0r_{ci})_z$$

L'energia potenziale del manipolatore è pertanto

$$U=\sum_{i=1}^{n} m_i\, g^T\,{}^0r_{ci}$$

SOSTITUZIONE NELLE EQUAZIONI DI LAGRANGE

Iniziamo a derivare

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left[\sum_i\sum_j H_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\right] = \sum_j H_{ij}\dot{q}_j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_j H_{ij}(q)\dot{q}_j\right] =$$

$= \sum_j H_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt}H_{ij}\,\dot{q}_j$ scrivendo $\frac{dH_{ij}(q)}{dt}$ come $\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}$ avremo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_j H_{ij}\ddot{q}_j + \sum_j\left(\sum_k \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\dot{q}_j$$

L'unica dipendenza di T dalle coordinate q sta nei coefficienti $H_{ij}(q)$ della forma quadratica, pertanto:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{1}{2}\sum_j\sum_k H_{jk}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k\right] = \frac{1}{2}\sum_j\sum_k \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Infine $\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_j m_j\, g^T\,{}^0r_{cj}\right] = \sum_j m_j\, g^T \frac{\partial\,{}^0r_{cj}}{\partial q_i}$

Ricordando che $\dot{r}_{cj} = J^j_{e_1}\dot{q}_1 + J^j_{e_2}\dot{q}_2 + \dots + J^j_{e_n}\dot{q}_n \Rightarrow \frac{dr_{cj}}{dt} = J^j_{e_1}\frac{dq_1}{dt} + \dots + J^j_{e_n}\frac{dq_n}{dt}$

avrò $\frac{\partial\,{}^0r_{cj}}{\partial q_i} = J^j_{e_i}$ perciò $\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j m_j\, g^T J^j_{e_i}$

L'equazione di Lagrange è pertanto:

$$\sum_j H_{ij}\ddot{q}_j + \underbrace{\sum_j\sum_k \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_j\sum_k \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k}_{\sum_j\sum_k h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k} + \sum_j m_j\, g^T J^j_{e_i} = Q_i$$

dove $h_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}$

ANALISI DELL'EQUAZIONE DINAMICA

Scrivendo $Q_i = [\tau + J^T F]_i = [\tau]_i + [J^T F]_i$ arriviamo alla forma desiderata:

$$\boxed{\tau_i = \sum_j H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j \sum_k h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j m_j g^T J_{G_j} - [J^T F]_i}$$

ovvero in forma vettoriale

$$\tau = M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) - J^T F$$ dove

- $M(q) = H(q)$ il cui elemento h_{ij} rappresenta il momento d'inerzia visto dall'asse del giunto i quando gli altri giunti sono bloccati
- $V(q,\dot{q}) = \sum_j \sum_k h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ in cui
  - il termine $h_{ijj} \dot{q}_j^2$ è dovuto all'effetto centrifugo nel giunto i per la velocità del giunto j
  - il termine $h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k$ è dovuto all'effetto Coriolis nel giunto i per il moto dei giunti j e k
- $G(q) = \sum_j m_j g_r J_G$ che tiene conto delle coppie in ciascun giunto esercitate dalla forza di gravità