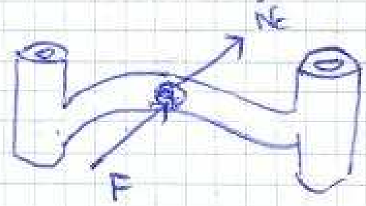
APPROCCIO di NEWTON-EULERO

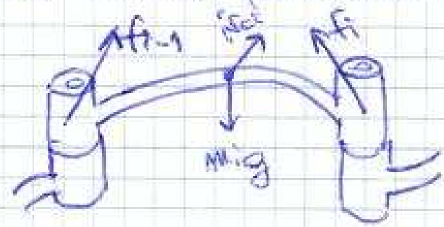
L'approccio di Newton-Eulero consiste nell'impostare il bilancio delle forze e dei momenti agenti su ciascun link del robot.

Ricordiamo che per un corpo rigido libero l'equazione di Newton mette in relazione la forza applicata al baricentro C e l'accelerazione che questa provoca:



$$F = m\dot{v}_C$$

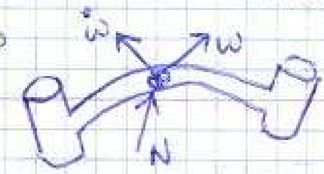
Considerando il link i connesso al link i-1 ed i+1 le forze che agiscono su di esso sono:



- f_{i-1} = ~~forza esercitata sul link i dal link i-1~~
- f_i = ~~forza esercitata dal link i sul link i+1~~; essendo interessati al link i come soggetto alla forza e non come agente, la forza che ci interessa è, per il principio di azione-reazione, $-f_i$;
- la ~~forza di gravità~~ $m_i g$

L'equazione di Newton è quindi: $f_{i-1} - f_i + m_i g = m_i \dot{v}_{C_i}$

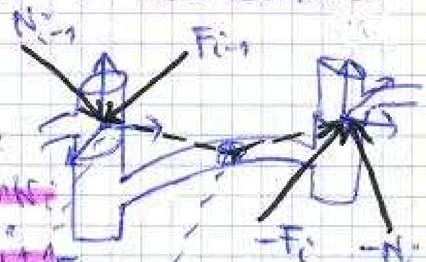
L'equazione di Eulero è l'analoga dell'equazione di Newton per quanto riguarda l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$.



Applicando un momento N al corpo otteniamo un'accelerazione angolare data dalla legge

$$N = {}^{C}I\dot{\omega} + \omega \wedge ({}^{C}I\omega)$$

dove ${}^{C}I$ è il tensore d'inerzia calcolato rispetto ad una terna con il baricentro C come origine.



Consideriamo il link connesso al precedente ed al successivo, su di esso agiscono i seguenti momenti:

- N_{i-1} = ~~momento esercitato dal link i-1 sul link i~~
- N_i = ~~momento esercitato dal link i sul link i+1~~ uguale e contrario a quello esercitato dal link i+1 sul link i (⇒ compare col segno − nell'equazione).

${}^{i-1}r_{C_i} \wedge f_{i-1}$ = ~~momento esercitato dalla forza f_{i-1}~~

${}^{i}r_{C_i} \wedge f_i$ = ~~momento esercitato dalla forza f_i, che compare col segno −~~

L'equazione di Eulero per il link i è pertanto

$$N_{i-1} - N_i + {}^{i-1}r_{C_i} \wedge f_{i-1} - {}^{i}r_{C_i} \wedge f_i = I_i\dot{\omega}_i + \omega_i \wedge I_i\omega_i$$

Notiamo che la forza di gravità non dà luogo ad alcun momento perché agisce direttamente sul baricentro.

PASSAGGIO ALLE EQUAZIONI IN FORMA CHIUSA

Ricordiamo che il modello dinamico deve mettere in relazione attraverso n equazioni le coppie τ_i (per $i=1..n$) sviluppate dagli attuatori sui giunti con le accelerazioni lineari $\ddot{r}_{ci}$ e angolari $\dot{\omega}_i$ dei singoli link (da cui, note le condizioni iniziali, si possono ricavare anche la q e la $\dot{q}$).

Le equazioni di Eulero e [illegible] impostate finora, invece:

- sono in numero $2n$
- presentano anche n incognite $f_1 .. f_n$ non strettamente necessarie
- non hanno le τ_i espresse in modo esplicito ma comprese nelle espressioni dei momenti $N_1 .. N_n$.

Una prima soluzione a questa questione consiste nell'impostare un algoritmo ricorsivo in due passi:

- una **ricorsione "dall'avanti"** che note $\omega_0, \ddot{r}_{c0} - g_0, \dot{\omega}_0$ prosegue verso l'end effector calcolando le $\omega_i, \dot{\omega}_i, \ddot{r}_{ci}$ con il metodo di Luh-Walker-Paul

Una volta arrivati a $\omega_n, \dot{\omega}_n, \ddot{r}_{cn}$ si conoscono f_n ed N_n.

A questo punto è sufficiente tornare verso il link 0:

- con una **ricorsione all'indietro** si applicano le equazioni di Newton ed Eulero nella forma:

$$f_{i-1} = f_i - m_i g + m_i \ddot{r}_{ci}$$

$$N_{i-1} = N_i - {}^{i-1}r_{ci} \wedge f_{i-1} - {}^{i}r_{ci} \wedge f_i + I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \wedge I_i \omega_i$$

fino a conoscere tutte le $f_0 .. f_n$ e, soprattutto, i momenti $N_1 .. N_n$ da cui si ricavano le τ_i

Un metodo meno sistematico ma + intuitivo, applicabile nelle architetture + semplici, consiste nell'eliminare le reazioni vincolari per pervenire ad un sistema di n equazioni nelle incognite $N_1 .. N_n$.

Illustreremo questo approccio con riferimento al robot planare 2R.

DINAMICA DEL ROBOT 2R CON APPROCCIO DI NEWTON EULERO

Trattandosi di un robot piano avremo che la velocità angolare è un vettore costantemente $\perp$ al piano per cui

- $\omega_i \wedge I_i \omega_i = 0$
- il prodotto $I_i \dot{\omega}_i$ è lo stesso se
  - prendiamo come ω_i uno scalare e quindi $\dot{\omega}_i$ è la sua derivata
  - moltiplichiamo tale scalare per il momento d'inerzia I_i (anziché considerare tutto il tensore).

Le equazioni di Newton sono quindi

$$f_0 - f_1 + m_1 g - m_1 \ddot{r}_{c1} = 0 \quad \text{per il giunto 1}$$

$$f_1 - f_2 + m_2 g - m_2 \ddot{r}_{c2} = 0 \quad \text{per il giunto 2}$$

tale equazione si riduce a

$$f_1 + m_2 g - m_2 \ddot{r}_{c2} = 0$$

se sull'end-effector non è applicata alcuna forza.