PIANIFICAZIONE NELLO SPAZIO DI LAVORO

Si pianifica il moto direttamente nello spazio operativo quando il compito del robot richiede percorsi con caratteristiche geometriche ben definite (esempio: saldatura a tratto continuo)

Con la pianificazione nello spazio dei giunti, infatti, la traiettoria cartesiana fra due punti di percorso non è facilmente prevedibile: dipende dalla non linearità del modello cinematico diretto.

Volendo vincolare rigidamente la traiettoria cartesiana, abbiamo quindi diverse soluzioni:

1) aumentare i punti di percorso nella pianificazione nello spazio dei giunti, con la conseguenza dell'aumento dei sistemi lineari da risolvere e quindi con maggiori oneri computazionali

2) pianificare direttamente la traiettoria nello spazio cartesiano: questo richiede di invertire istante per istante la cinematica e quindi pone un limite inferiore al tempo di campionamento (dovuto ad un aumento dei calcoli come nel caso 1).

La pianificazione nello spazio cartesiano può avvenire in 2 modi:

1) pianificazione con punti di percorso, che avviene applicando a ciascuna componente del vettore posizione (ed eventualmente anche a ciascun angolo minimo dell'orientamento) le tecniche polinomiali viste nello spazio dei giunti.

La differenza è che, ad ogni istante di campionamento, si preleva la traiettoria interpolata e si inverte la cinematica per ricavare le q di riferimento da inviare al controllore.

2) pianificazione con primitive di percorso, in cui viene assegnata la curva $p = f(t)$ da seguire; risulta in tal caso conveniente calcolarsi l'ascissa curvilinea $s = \int_{p_0}^{p_f} \hat{T}\, d\bar{p} = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$

e interpolare $s(t)$ fra 0 ed s_f.

Tale interpolazione può essere lineare: $s(t) = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} t = \frac{s_f}{t_f} t$ oppure cubica se vogliamo imporre che $\dot{p}_0$ e $\dot{p}_f = 0$

A tale scopo basta ricordare che $\dot{p} = \dot{s} \frac{dp}{ds} = \dot{s} \hat{T}$ quindi con una $s(t)$ cubica possiamo imporre che $\dot{s}(t_f) = \dot{s}(0) = 0$.

La stessa relazione fra $\dot{p}$ ed $\dot{s}$ può essere sfruttata quando sono richieste le velocità in alcuni tratti della curva: si può ricorrere alle solite cubiche raccordate.

Infine la velocità può essere assegnata in ciascun punto: è allora la $s(t)$ ad essere assegnata (ricordiamo che è la parametrizzazione a caratterizzare la velocità di percorrenza della curva) e quindi si tratta solo di invertire la cinematica e comandare i giunti.

PIANIFICAZIONE DELL'ORIENTAMENTO

Non è possibile interpolare i versori $\hat{n}, \hat{s}, \hat{a}$ della matrice di rotazione perché non avremmo la garanzia di ottenere istante per istante una matrice ortonormale.

Bisogna quindi ricorrere a rappresentazioni minime, ad esempio

1) **angoli di Eulero ZYZ** per cui il vettore orientamento è $\phi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{bmatrix}$ mentre la velocità angolare risulta

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\varphi & C_\varphi S_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & S_\varphi S_\vartheta \\ 1 & 0 & C_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\phi}$$

il vettore $\dot{\phi}$ si ricava derivando ϕ, che a sua volta è l'interpolazione fra ϕ_i e ϕ_f:

$$\phi = \phi_i + \frac{s}{\|\phi_f - \phi_i\|} \phi_f - \phi_i$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|} (\phi_f - \phi_i)$$

2) **asse-angolo**, che permette una rotazione della terna + prevedibile durante l'interpolazione, mentre la non linearità della matrice di rotazione per gli angoli di Eulero potrebbero comportare strani avvolgimenti del polso.

Dette ${}^0_iR$ ed ${}^0_fR$ le matrici di rotazione fra la terna iniziale e quella base e fra la terna finale e quella base costruiamo la matrice $R(t)$ che descrive la trasformazione fra ${}^0_iR$ ed ${}^0_fR$ nel tempo, dovrà quindi avere $R(0) = I \quad R(t) = {}^i_fR$

Detta ${}^i_fR = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ bisogna interpolare un angolo $\vartheta(t)$ fra $\vartheta(0) = 0$ e $\vartheta(t_f) = \vartheta_f = \arccos\left[\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right]$ che rappresenta la rotazione attorno all'asse $\bar{r} = \frac{1}{2 S_{\vartheta_f}} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$ che dobbiamo essere fisso.

Per interpolare $\vartheta(t)$ si possono usare le solite tecniche, nel caso di polinomio cubico per annullare velocità angolare iniziale e finale è sufficiente annullare $\dot{\vartheta}(0)$ e $\dot{\vartheta}(t_f)$, in quanto ${}^i\omega = \dot{\vartheta} r$, mentre l'accelerazione è ${}^i\dot{\omega} = \ddot{\vartheta} r$ (entrambe sono espresse nella terna iniziale, per passare alla terna base dobbiamo premoltiplicare per ${}^0_iR$: ${}^0\omega = {}^0_iR\,{}^i\omega$, ${}^0\dot{\omega} = {}^0_iR\,{}^i\dot{\omega}$).

SCALATURA DINAMICA DELLE TRAIETTORIE

Supponiamo di aver pianificato il vettore $q(t)$ da fornire ai giunti per ottenere la traiettoria desiderata nell'intervallo $(0, t_f)$.

Con il modello dinamico inverso possiamo conoscere le coppie $\tau(t)$ richieste agli attuatori per ottenere la $q(t)$.

Se qualche componente del vettore τ eccede la coppia effettivamente erogabile da un attuatore, abbiamo 2 soluzioni possibili

1) ricalcolare la traiettoria, in modo da eseguire ad esempio raggi di curvatura + larghi o da ripartire il carico sui motori + potenti

2) accontentarci di ripercorrere la traiettoria data in un tempo $\bar{t}_f > t_f$; per questo è sufficiente allargare la scala dei tempi con una variabile $\bar{t} = ct$ dove $c > 1$.