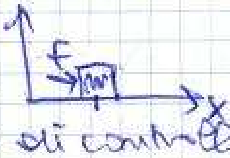
INTRODUZIONE AL CONTROLLO: L'ESEMPIO DI UNA MASSA ($P(s)=1/s^2$) (18)

Prima di parlare di controllo di manipolatori, introduciamo il concetto di sistema di controllo considerando il + semplice sistema meccanico:

Un corpo di massa m di cui vogliamo controllare la posizione x (uscita) agendo sulla forza f che agisce su di esso.



Dalla legge di Newton $F = m\ddot{x}$ ricaviamo il legame ingresso-uscita in catena aperta, ovvero in assenza di controllore.

In termini controllistici tale equazione descrive la funzione di trasferimento del processo da controllare.

$$F(s) = s^2 m X(s) \Rightarrow P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2}$$

Per semplicità consideremo un corpo di massa unitaria, per cui il nostro processo è semplicemente un doppio integratore $P(s) = \frac{1}{s^2}$.

Per progettare il sistema di controllo dobbiamo specificare gli obiettivi del controllo stesso. Distinguiamo due casi:

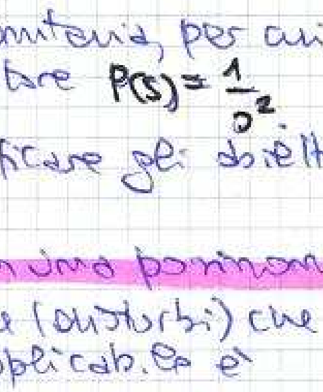
1) **REGOLAZIONE.** se vogliamo mantenere il corpo in una posizione desiderata x_d, indipendentemente dalle forze esterne (disturbi) che agiscono su di esso, un possibile ingresso (forza) applicabile è

$$F = -k_v \dot{x} + k_p (x_d - x)$$

in questo modo l'equazione che regola la $x(t)$ è

$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = k_p x_d$$

Ricordando che la soluzione di un'e.d. lineare del 2° ordine non omogenea è data dalla somma di due termini, diremo che $x(t)$ è la composizione di



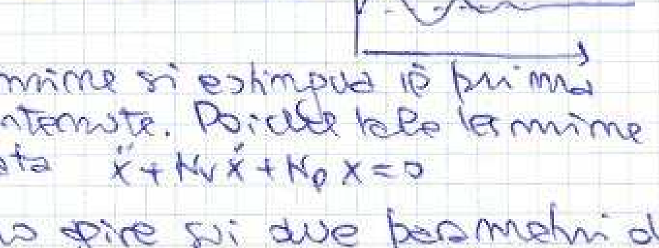
A) un termine costante (e quindi permanente): $x(t) = x_d$ mediante il quale forziamo il corpo ad assumere la posizione

B) un termine transitorio, estinto il quale si ha coincidenza fra uscita effettiva ed uscita desiderata.

Abbiamo quindi interesse che tale termine si estingua il prima possibile e con sovraelongazioni contenute. Poiché tale termine è la soluzione dell'omogenea associata $\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0$

Per ottenere questi risultati possiamo agire sui due parametri del sistema di controllo:

- **k_p** che rappresenta la **rapidezza** del sistema a ciclo chiuso (corpo + controllore)



- **k_v** che rappresenta il coefficiente di **attrito viscoso** del sistema a ciclo chiuso e contribuisce quindi allo smorzamento del contributo descritto in B).

Una buona soluzione è scegliere k_p, k_v in modo che il termine transitorio sia aperiodico critico

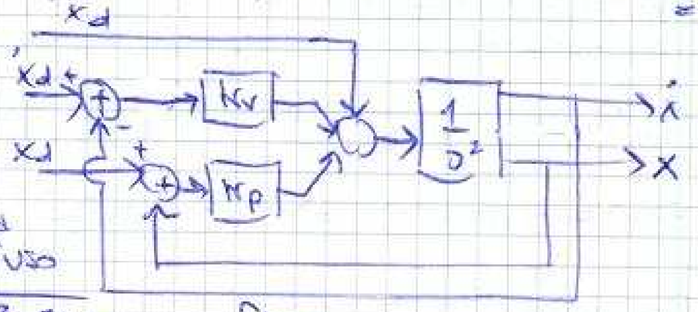
2) ASSERVIMENTO: se vogliamo che il corpo segua una traiettoria $x_d(t)$ allora dobbiamo inviare al sistema di controllo anche $\dot{x}_d$ ed $\ddot{x}_d$, in modo che la forza agente sul processo diventi

$$f=\ddot{x}_d+k_v(\dot{x}_d-\dot{x})+k_p(x_d-x)$$

l'equazione a ciclo chiuso diventa quindi:

$f=m\ddot{x}=\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x}_d-\ddot{x}+k_v(\dot{x}_d-\dot{x})+k_p(x_d-x)=0$, ovvero possiamo controllare la dinamica dell'errore $e=x_d-x$ ancora agendo sulle costanti k_p e k_v:

$$\ddot{e}+k_v\dot{e}+k_p e=0$$



le radici dell'equazione caratteristica associata vengono dette poli a ciclo chiuso del sistema e sono

$$s_{1,2}=-\frac{k_v}{2}\pm\frac{\sqrt{k_v^2-4k_p}}{2}$$

fig. 1

quindi se vogliamo che l'errore raggiunga il prima possibile il valore di regime senza sovraelongazioni, dobbiamo imporre che:

$k_v^2-4k_p=0$

lo schema di controllo è indicato in figura e notiamo che generalizza quello proposto per la regolazione: se $x_d=$ costante $\Rightarrow \dot{x}_d=\ddot{x}_d=0$

Aggiungendo un ulteriore blocco $k_i\int e\,dt$ il sistema di controllo viene detto P.I.D. e l'errore a regime si può annullare anche in presenza di ingressi a rampa, come mostrato in figura.

CONTROLLO PARTIZIONATO di un SISTEMA DEL 2° ORDINE

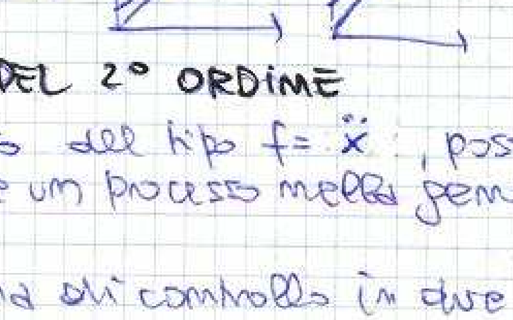
Adesso che sappiamo controllare un processo del tipo $f=\ddot{x}$, possiamo ricorrere ad un artificio per controllare un processo nella generica forma $f=m\ddot{x}+b\dot{x}+kx$

L'artificio consiste nel dividere il sistema di controllo in due parti:

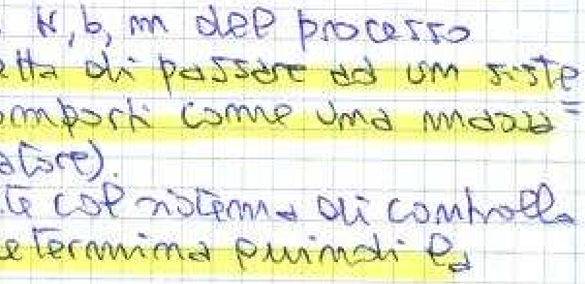
- una che a partire dai parametri k, b, m del processo controllato con l'ingresso f permetta di passare ad un sistema con un ingresso f' che si comporti come una massa unitaria (come un doppio integratore).
- l'altra che coincide esattamente col sistema di controllo precedente: attraverso k_v e k_p determina quindi la dinamica dell'errore $e=x_d-x$

Supponendo di ottenere f da f' come $f=\alpha f'+\beta$ vediamo che forma devono avere α e β perché possa aversi $f'=\ddot{x}$

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=\alpha f'+\beta \Rightarrow \begin{cases}\alpha=m\\ \beta=b\dot{x}+kx\end{cases}$$



lo schema a cui si perviene per la parte "model-based" del sistema di controllo si deduce dall'equazione $f=\alpha f'+\beta$:



servono un amplificatore di guadagno m e della dinamica: $b\dot{x}+kx$