RAPPRESENTAZIONI MINIME DELL'ORIENTAMENTO

Dei 9 coseni direttori nella matrice di rotazione solo 3 sono indipendenti; devono infatti soddisfare 6 vincoli

- 3 di ortogonalità in modo che $\hat{x}\cdot\hat{y}=0$ $\hat{x}\cdot\hat{z}=0$ $\hat{y}\cdot\hat{z}=0$
- 3 di normalizzazione, ovvero $|\hat{x}|=1$, $|\hat{y}|=1$, $|\hat{z}|=1$

Il numero minimo di parametri per descrivere l'orientamento di un corpo rigido (o di un sistema di riferimento) è quindi 3 e le rappresentazioni che ricorrono a 3 parametri vengono dette minime.

Un'idea tipica è quella di prendere le ampiezze di 3 rotazioni successive; questo spiega perchè esistono diverse rappresentazioni minime dell'orientamento.

Oltre alla scelta degli assi attorno cui ruotare, infatti è possibile scegliere l'ordine delle 3 rotazioni; è noto infatti che le rotazioni finite non sono commutative (come del resto il prodotto delle matrici che le rappresentano).

ROTAZIONI ATTORNO AD ASSI FISSI O ANGOLI di CARDANO

Se vogliamo portare una terna mobile {B} a sovrapporsi ad una fissa {A} possiamo pensare di effettuare tre rotazioni successive attorno agli assi della terna fissa: le tre ampiezze delle rotazioni vengono detti angoli di Cardano.

Essendo importante l'ordine, abbiamo 27 possibili combinazioni, ma ovviamente quelle che presentano 2 rotazioni successive attorno allo stesso asse vanno scartate (due rotazioni consecutive attorno ad uno stesso asse equivalgono ad un'unica rotazione di ampiezza pari alla loro somma)

Restano quindi 12 possibili sets fra cui particolare importanza riveste la terna degli angoli aeronautici o **RPY** (roll-pitch-yaw ovvero rollio beccheggio e imbardata) che danno luogo alla matrice complessiva:

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=R_Z(\alpha)\,R_Y(\beta)\,R_X(\gamma)=\begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0\\ s\alpha & c\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\beta & 0 & c\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & c\gamma & -s\gamma\\ 0 & s\gamma & c\gamma\end{bmatrix} \quad (*)$$

SINGOLARITÀ di RAPPRESENTAZIONE

Abbiamo visto come calcolare la matrice di rotazione complessiva una volta assegnati gli angoli aeronautici (moltiplicandone da **destra verso sinistra** delle matrici di rotazione elementari);

Il problema inverso si ha quando, assegnata la matrice di rotazione

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}$$

vogliamo risalire agli angoli RPY componenti; se espandiamo il prodotto (*) otteniamo la matrice R

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma\\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma\\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma\end{bmatrix} \quad (*)$$

che evidenzia l'esistenza di due problematiche:

1) dobbiamo conoscere a priori l'intervallo di appartenenza dell'angolo di beccheggio, perché esistono due soluzioni:

$$\begin{cases} \alpha = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \beta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \gamma = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \end{cases} \quad \text{per } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \\ \beta = \text{atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \gamma = \text{atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \end{cases} \quad \text{per } \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

2) per $\cos\beta = 0$ ($\Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \pm 1$) la matrice ${}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha)$ diventa

$$\begin{bmatrix} 0 & c(\alpha+\gamma) & s(\alpha+\gamma) \\ 0 & -s(\alpha+\gamma) & c(\alpha+\gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e non è possibile determinare gli angoli α, γ; esistono infatti infinite soluzioni, ovvero tutte quelle per cui $\alpha+\gamma$ assume un determinato valore.

In questo caso parliamo di singolarità di rappresentazione ed è fondamentale scegliere gli angoli di cardano che abbiano tale singolarità in punti al di fuori dello spazio di lavoro.

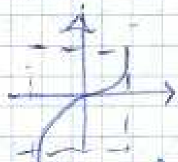
Non a caso gli angoli (aero)nautici sono usati in nautica xché $\beta = \pi/2$ significherebbe avere la nave disposta verticalmente.

LA FUNZIONE ATAN2

Dovendo spiegare il ricorso alla funzione atan2 in luogo degli arcoseni ed arcoseni possiamo citare 2 grandi vantaggi:

1) conoscendo i valori $\operatorname{sen}\beta = A$ e $\cos\beta = B$ esiste un solo valore di β che soddisfa entrambe (un solo quadrante); risolvendo invece prima $\beta_{1,2} = \arcsin A$ troviamo 2 valori possibili e dobbiamo quindi confrontare $\cos[(\arcsin A)_{1,2}]$ con $\cos\beta$ per conoscere quale dei due sia accettabile.

2) dato il particolare andamento di $\arcsin x$ e $\arccos x$ ho grosse differenze di risoluzione a seconda che x sia prossimo a zero o all'unità; atan2 non crea invece questo tipo di problemi numerici



ROTAZIONI ATTORNO AGLI ASSI MOBILI: ANGOLI di EULERO

Se anziché attorno agli assi della terna fissa A ruotiamo attorno a quelli della terna mobile B (solidale al corpo di cui vogliamo definire l'orientamento) si parla di angoli di Eulero.

Le moltiplicazioni delle matrici di rotazione elementare avvengono in questo caso **da sinistra verso destra** e questo spiega ad esempio perché la matrice di rotazione complessiva per gli angoli di cardano XYZ coincide con quella degli angoli di Eulero ZYX

$${}^A_B R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_X(\gamma) = {}^A_B R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha)$$

Le possibili configurazioni degli angoli di Eulero sono quindi 12,