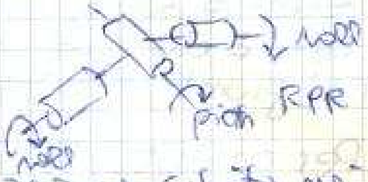
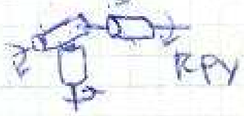
come quelle degli angoli di Cardano. Oltre alla ZY'X' altre terne utilizzate sono la Z'X'Z' (angoli astronomici θ, ϕ, ψ che danno luogo alla matrice ${}^{A}_{B}R_{Z'X'Z'}(\phi, \theta, \psi)$) e la ZYZ detta anche di roll-pitch-roll che avendo una singolarità di rappresentazione in $\operatorname{sen}\theta = 0$

(basta calcolare ${}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\phi, \theta, \psi) = R_{Z'}(\phi) R_{Y'}(\theta) R_{Z'}(\psi)$)



è molto utilizzata nei polsi dei robot detti di roll-pitch-roll, appunto.

in questo caso, infatti, la singolarità di rappresentazione cade nei punti di singolarità cinematica RPR, ovvero in configurazioni non raggiungibili fisicamente



ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE

Si dimostra che per ogni coppia di terne A, B esiste un unico asse (detto asse equivalente di rotazione finita) tale che le due terne possono essere sovrapposte con un'unica rotazione di un angolo θ attorno ad esso $\hat{k}$.

Non si tratta di una rappresentazione minima perché i parametri sono 4: le componenti k_x, k_y, k_z del versore dell'asse (legate dal vincolo di normalità) e l'angolo θ.

Si dimostra ancora che la matrice $R_k(\theta)$ associata a tale rotazione equivale a quella ottenibile con le seguenti 3 operazioni

- rotazione fino a sovrapporre k a z $\qquad R_z(\alpha) R_y(\beta)$
- rotazione di θ attorno a z (cioè k) $\qquad R_z(\theta)$
- ripristino dell'orientamento iniziale di k $\qquad R_y(-\beta) R_z(-\alpha)$

Pertanto $\quad R_k(\theta) = R_z(\alpha) R_y(\beta) R_z(\theta) R_y(-\beta) R_z(-\alpha)$

Per la trasformazione inversa, si ha

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \qquad \text{mentre} \qquad \hat{k} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

e quindi la singolarità si ha per $\operatorname{sen}\theta = 0$

RAPPRESENTAZIONI MINIME E MATRICI DI TRASFORMAZIONE

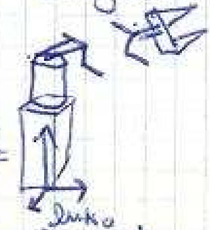
Con l'introduzione della rappresentazione minima dell'orientamento, la sottomatrice di rotazione nella matrice di trasformazione omogenea dipende da soli 3 parametri; quindi l'intera matrice T presenterà solo 6 parametri indipendenti: esattamente i gradi di libertà di un corpo libero nello spazio.

Nel caso degli angoli di Eulero, ad esempio, avremo:

$${}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R_{B} & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & {}^{A}x_{BORG} \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & {}^{A}y_{BORG} \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma & {}^{A}z_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

PROBLEMA CINEMATICO DIRETTO PER UN ROBOT SERIALE

Il problema cinematico diretto consiste nella determinazione della posizione e dell'orientamento dell'organo terminale del manipolatore una volta noti le variabili di giunto, ovvero la posizione relativa fra due giunti (che è la grandezza che andiamo a controllare e che sarà una lunghezza nei giunti prismatici ed un angolo nei giunti rotoidali).

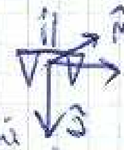


Per quanto detto finora si tratta quindi di determinare l'origine e i versori di una terna solidale all'end-effector rispetto ad un sistema di riferimento assegnato (fisso).

Il problema cinematico diretto è quindi risolto quando è nota la matrice di trasformazione fra queste due terne:

$$ {}^0_mT(q) = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^0\hat{n}(q) & {}^0\hat{s}(q) & {}^0\hat{a}(q) & {}^0P_{MORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

dove $q=(q_1 \dots q_n)$ è il vettore delle variabili di giunto ed $\hat{n}, \hat{s}, \hat{a}$ sono i versori della terna utensile (si è scelta la notazione delle pinze, in cui $\hat{a}$ individua la direzione di approccio, $\hat{s}$ quella di scivolamento ed $\hat{n}$ è tale da formare con $\hat{a}, \hat{s}$ una terna destrorsa).



Nei robot seriali, formati cioè da una catena cinematica aperta (una sola sequenza di bracci connette i due estremi della catena), le matrici di trasformazione omogenea introdotte suggeriscono un metodo immediato per il calcolo di ${}^m_0T(q)$

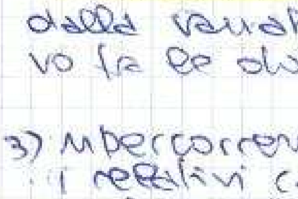
1) si definisce una terna di coordinate solidale ad ogni braccio, che numereremo da 0 ad m (link$_0$ ≡ base o telaio, fisso ... link$_M$ ≡ organo terminale)

2) si calcolano le matrici di trasformazione omogenee fra terne solidali a giunti consecutivi; ciascuna matrice dipenderà solo dalla variabile di giunto che determina lo spostamento relativo fra le due terne ${}^{i-1}_{i}T = {}^{i-1}_{i}T(q_i)$

3) ripercorrendo all'indietro la catena cinematica ed operando i relativi cambiamenti di riferimento la matrice complessiva sarà semplicemente il prodotto delle matrici elementari

$$ {}^0_mT(q) = {}^0_mT(q_1 \dots q_m) = {}^0_1T(q_1)\,{}^1_2T(q_2) \cdots {}^{m-1}_{m}T(q_m) $$

PROBLEMA CINEMATICO DIRETTO PER UN ROBOT 2R (2 giunti rotoidali)



Per robot particolarmente semplici il metodo sopra illustrato potrebbe risultare sconveniente rispetto ad un approccio geometrico di tipo immediato.

E' il caso del robot piano 2R, quando si sia interessati alla sola posizione P dell'end-effector

Scegliendo le variabili di giunto indicate in figura si ha infatti che

$$ x_P = l_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) $$

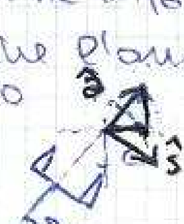
$$ y_P = l_1 \,\mathrm{sen}\,\vartheta_1 + l_2 \,\mathrm{sen}(\vartheta_1 + \vartheta_2) $$

Se volessimo conoscere anche l'orientamento della pinza, avremo

$$ \hat{a} = \cos\vartheta_{12}\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\vartheta_{12}\,\hat{y} $$

$$ \hat{s} = \mathrm{sen}\,\vartheta_{12}\,\hat{x} - \cos\vartheta_{12}\,\hat{y} $$

$\hat{n} \equiv \hat{z}$ da cui:



$$ {}^0_nT = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & s_{12} & c_{12} & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$