3) SINGOLARITÀ

sono punti in cui la matrice Jacobiana diventa singolare e quindi opportuni profili di velocità non sono assegnabili al manipolatore in quel punto.

Si tratta quindi di un problema di cinematica inversa di velocità, ma si manifesta anche nella cinematica inversa di posizione: nei punti singolari si hanno infatti infinite soluzioni nonostante il robot non sia ridondante ($n=m$).

4) CALCOLO DELLE SOLUZIONI

gli approcci per il calcolo delle soluzioni sono sostanzialmente di 2 tipi

1) numerico, che hanno il vantaggio di garantire almeno una soluzione; infatti allo stato attuale:
   - è possibile ricavare una soluzione per tutti i robot a 6 g.d.l. con coppie prismatiche e rotoidali.

Per contro presentano due grossi svantaggi:
   - sono lenti rispetto ai metodi analitici e questo complica il loro utilizzo in modo "real time" nel controllo del manipolatore.
   - non sempre restituiscono tutte le soluzioni

2) metodi analitici (in forma chiusa), che possono ricorrere ad un approccio algebrico o ad uno geometrico:

non sono applicabili in generale a tutti i robot, ma a particolari strutture che conducono ad equazioni non troppo semplici

Ad esempio quando molti dei parametri di Denavit-Hartenberg sono nulli o pari a 90° (è interessante notare che questa cosa contemporaneamente è portatrice delle soluzioni).

Quanto detto sugli svantaggi dei metodi numerici, comunque, fa sì che quasi tutte le architetture commerciali presentino queste caratteristiche.

CINEMATICA INVERSA DEL POLSO: METODO di PIEPER

Un esempio di metodo in forma chiusa è stato sviluppato da Pieper per robot in cui 3 assi consecutivi si intersecano in un punto: è il caso del **polso sferico**. L'algoritmo prevede due fasi:

1) si determina la posizione del punto di intersezione (centro del polso) e da essa si ricavano le prime tre coordinate di giunto. (i giunti che determinano la posizione)

2) si determina l'orientamento del polso e da questo si ricavano le 3 variabili interne di orientamento (quelle dei giunti del polso sferico, appunto)

Se si ha l'accortezza di riconoscere a quale insieme di angoli di Eulero corrispondono tali coordinate di giunto il problema risulta notevolmente semplificato.

Ad esempio per il polso sferico RPR, la terna corrispondente è ZYZ se sono noti gli angoli di Eulero per l'orientamento si hanno

CINEMATICA INVERSA DI ALCUNE STRUTTURE TIPICHE

1) ROBOT 2R

Nella matrice ${}^0_2T = \left[\begin{array}{ccc|c} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1+l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1+l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ si hanno solo due parametri liberi $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ quindi possiamo pensare di assegnare solo due grandezze per caratterizzare il compito dell'end-effector; ad esempio:

A) la posizione x, y dell'end-effector senza specificare l'orientamento

B) una coordinata di posizione (x o y) e l'orientamento attraverso l'angolo ϑ_{12}

Nel caso A) avremo $x = l_1c_1 + l_2c_{12}$, $y = l_1s_1 + l_2s_{12}$ da cui $x^2+y^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_1l_2c_1c_{12} + l_1l_2s_1s_{12}$

ricordando che $c_{12} = c_1c_2 - s_1s_2$ mentre $s_{12} = s_1c_2 + c_1s_2$ avremo che:

$$x^2+y^2-l_1^2-l_2^2 = l_1l_2\left[c_1(c_1c_2-\cancel{s_1s_2}) + s_1(s_1c_2+\cancel{c_1s_2})\right] = l_1l_2(c_1^2+s_1^2)c_2$$

Perciò $\vartheta_2 = \cos^{-1}\dfrac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{l_1l_2}$

Per questioni di approssimazione, sarebbe comunque preferibile lasciare indicato $c_2 = \dfrac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{l_1l_2}$ ed $s_2 = \pm\sqrt{1-c_2^2}$ ed esprimere la seconda coordinata interna come $\vartheta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$.

Ricavando a questo punto ϑ_{12} dagli elementi r_{11} ed r_{21} avremo

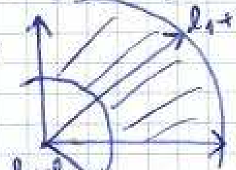
$$\vartheta_{12} = \vartheta_1 + \vartheta_2 = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \Rightarrow \vartheta_1 = \vartheta_{12} - \vartheta_2 = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) - \text{atan2}(s_2, c_2)$$

si tratta a questo punto di studiare

A) l'esistenza della soluzione, che si ha per $|c_2| \le 1$ cioè

$$-1 \le \frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{l_1l_2} \le 1 \iff l_1^2+l_2^2-l_1l_2 \le x^2+y^2 \le l_1^2+l_2^2+l_1l_2 \text{ cioè}$$

$(l_1-l_2)^2 \le x^2+y^2 \le (l_1+l_2)^2$ che determina uno spazio di lavoro primario con l'andamento in figura



B) esistenza di soluzioni multiple

in questo caso si tratta di una duplicazione, in quanto la posizione x, y può essere raggiunta sia con $\vartheta_2 = \text{atan2}(c_2, +\sqrt{1-c_2^2})$ che con $\vartheta_2 = \text{atan2}(c_2, -\sqrt{1-c_2^2})$

c) singolarità: se $l_1 = l_2$ allora si può raggiungere l'origine con $\vartheta_2 = \pi$ ma con qualsiasi valore di ϑ_1