2) MANIPOLATORE SFERICO

Avendo 3 gdl decidiamo di assegnare la posizione dell'end-effector

$$\begin{cases} d_3 \cos\vartheta_1 s\vartheta_2 - l_2 \operatorname{sen}\vartheta_1 = x \\ d_3 \operatorname{sen}\vartheta_1 \operatorname{sen}\vartheta_2 + l_2 \cos\vartheta_1 = y \\ d_3 \cos\vartheta_2 = z \end{cases}$$

da cui $x^2+y^2+z^2 = d_3^2 + l_2^2$ quindi $d_3 = + \sqrt{x^2+y^2+z^2-l_2^2}$ in cui il segno − è da scartare

e quindi $c_2 = \dfrac{z}{d_3} = + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-l_2}}$

Inoltre $x^2+y^2 = d_3^2 s\vartheta_2^2 + l_2^2$ da cui $s_2 = \pm\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-l_2^2}{d_3^2}} = \pm\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-l_2^2}{x^2+y^2+z^2-l_2^2}}$

Ne segue che $\vartheta_2 = \operatorname{atan2}\left(\pm\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-l_2^2}{x^2+y^2+z^2-l_2^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-l^2}}\right)$

Noti d_3, s_2 si ha che

$d_3 \cos\vartheta_1 s_2 - l_2 s\vartheta_1 = x$ in cui ponendo $t = \tan\frac{\vartheta_1}{2} \Rightarrow \begin{cases} c\vartheta_1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ s\vartheta_1 = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$

$$x(t^2+1) + d_3 s_2 t^2 + 2l_2 t - d_3 s_2 = 0$$

$(x+d_3 s_2)t^2 + 2l_2 t + x - d_3 s_2 = 0$ perciò $t_{1,2} = \dfrac{-l_2 \pm \sqrt{l_2^2 + d_3^2 s_2^2 - x^2}}{x + d_3 s_2}$

perciò $\vartheta_1 = \tan^{-1}\left[-2\left(\dfrac{l_2 \pm \sqrt{\dots}}{x + d_3 s_2}\right)\right]$

Dovendosi avere $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-l_2^2}}\right| < 1$ avremo $z^2 < x^2+y^2+z^2-l_2^2$ cioè $x^2+y^2 > l_2^2$ che è una prima limitazione per lo spazio di lavoro: si possono raggiungere i punti al di fuori di un cilindro di raggio l_2, com'era prevedibile.

3) MANIPOLATORE ANTROPOMORFO

anche questo robot ha 3 gdl quindi assegniamo la posizione dell'end-effector mediante le 3 coordinate cartesiane x, y, z.

Si ha $\begin{cases} x = c_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ y = s_1(l_2 c_2 + l_3 c_{23}) \\ z = l_2 s_2 + l_3 s_{23} \end{cases}$ da cui $x^2+y^2+z^2 = l_2^2 c_2^2 + l_3^2 c_{23}^2 + 2l_2 l_3 c_2 c_{23} + l_2^2 s_2^2 + l_3^2 s_{23}^2 + 2l_2 l_3 s_{23} s_2 = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 c(\vartheta_{23} - \vartheta_2)$ perciò

$$\vartheta_{23} - \vartheta_2 = \vartheta_3 = \arccos \frac{x^2+y^2+z^2-l_2^2-l_3^2}{2l_2 l_3}$$

Invece $\vartheta_1 = \operatorname{atan}\dfrac{y}{x} + k\pi$; noti ϑ_1 e ϑ_3, quindi, ricaviamo s_2 e c_2 dalle seguenti equazioni: $\begin{cases} z = l_2 s_2 + l_3 s_{23} = l_2 s_2 + l_3(s_2 c_3 + s_3 c_2) \\ x = c_1 l_2 c_2 + l_3 c_1 (c_2 c_3 - s_2 s_3) \end{cases}$

che si possono scrivere in forma matriciale come:

$$\begin{aligned} (l_2 + l_3 c_3) s_2 + (l_3 s_3) c_2 &= z \\ -(l_3 c_1 s_3) s_2 + (l_2 c_1 + l_3 c_1 c_3) c_2 &= x \end{aligned} \Rightarrow \quad c_2 = \frac{(c_1 c_3 l_3 + c_1 l_2) z - l_3 s_3 z}{c_1(l_3^2 + l_2^2 + 2c_3 l_2 l_3)} \qquad s_2 = \frac{(c_3 l_3 + l_2) x + c_1 l_3 s_3 z}{c_1(l_3^2 + l_2^2 + 2c_3 l_2 l_3)}$$

quindi $\vartheta_2 = \operatorname{atan2}(s_2, c_2)$