VELOCITA' LINEARE E VELOCITA' ANGOLARE

Le due grandezze fondamentali dell'analisi cinematica differenziale (o cinematica di velocità) sono:

1) la **velocità lineare** di un punto Q che è la derivata del suo vettore posizione: $\boxed{{}^{B}V_{Q} = \frac{d\,{}^{B}Q}{dt}}$

volendo esprimere la velocità di Q nel sistema di riferimento {A} si ricorre alle matrici di rotazione come già visto per i vettori posizione: ${}^{A}V_{Q} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}$

2) la **velocità angolare** di un corpo, che si definisce (come lo spostamento) appoggiandosi ad una terna {B} solidale al corpo stesso. Si definisce infatti il vettore ${}^{A}\Omega_{B}$ in cui

- la **direzione** di ${}^{A}\Omega_{B}$ individua l'asse di istantanea rotazione di {B} rispetto ad {A}
- il **modulo** di ${}^{A}\Omega_{B}$ individua la velocità di rotazione.

In questo modo se abbiamo un punto P fisso rispetto alla terna solidale al corpo, la sua velocità rispetto alla terna {A} è comunque non nulla, infatti:

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P \Rightarrow {}^{A}\dot{P} = {}^{A}V_{P} = {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}P + {}^{A}_{B}R\,\cancel{{}^{B}\dot{P}}^{=0} = {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}_{A}R\,{}^{A}P = {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}P = {}^{A}_{B}S\,{}^{A}P$$

dove si è definita la matrice velocità di rotazione ${}^{A}_{B}S = {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{A}_{B}R^{T}$

Si può dimostrare che ${}^{A}_{B}S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$ dove $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ sono le componenti del vettore velocità angolare ${}^{A}\Omega_{B} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix}$

Per la particolare forma di ${}^{A}_{B}S$, quindi, la quantità ${}^{A}_{B}S\,{}^{A}P$ equivale al seguente prodotto vettoriale: $\boxed{{}^{A}V_{P} = {}^{A}_{B}S\,{}^{A}P = {}^{A}\Omega_{B} \wedge {}^{A}P}$ (*)

TRASFORMAZIONE DELLA V FRA DUE TERNE IN MOVIMENTO RELATIVO

La (*) che ricordiamo come formula di Poisson per i corpi rigidi è di fondamentale importanza per conoscere la velocità di un punto Q rispetto alla terna {A} una volta nota la sua velocità nella terna {B} (notare che Q è in moto anche rispetto a {B}, mentre in (*) P è fisso in {B});

Partendo infatti dall'equazione di trasformazione per la posizione ${}^{A}Q = {}^{A}P_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q$ e derivando, otteniamo:

$${}^{A}\dot{Q} = {}^{A}V_{Q} = {}^{A}\dot{P}_{BORG} + {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}Q + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{Q} = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}\Omega_{B} \wedge {}^{B}Q + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} = \boxed{{}^{A}V_{BORG} + {}^{A}\Omega_{B} \wedge {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}}$$

Tale espressione generale si particolarizza in due casi particolari di

1) pura rotazione in cui ${}^{A}V_{BORG} = 0 \Rightarrow {}^{A}V_{Q} = {}^{A}\Omega_{B} \wedge {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}$ (*)

2) pura traslazione, in cui ${}^{A}\Omega_{B} = 0 \Rightarrow {}^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}$

CINEMATICA DI VELOCITA' CON ALGORITMO di LUH-WALKER-PAUL

Un primo approccio al calcolo delle velocità dei membri può essere quello di partire dal telaio e aggiungere via via le velocità introdotte dai motori con le relazioni di trasformazione precedenti.

Infatti:

1) se il giunto è **rotoidale** le due terne sono in pura rotazione e quindi per la velocità lineare vale la legge:

$${}^{i}v_{i+1} = v_i + \omega_i \wedge {}^{i}p_{i+1} \Rightarrow {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}v_i + {}^{i+1}\omega_{i+1} \wedge {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}p_{i+1}$$

per le velocità angolare si ha una sovrapposizione dei due contributi, che devono però essere espressi nello stesso sistema di riferimento:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\hat{z}_i \Rightarrow {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\hat{z}_i\,\dot{\theta}_{i+1}$$

2) se il giunto è **prismatico** la velocità angolare non cambia a meno di un cambio di coordinate

$$\omega_{i+1} = \omega_i \Rightarrow {}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i$$

per la velocità lineare dobbiamo invece ricorrere alla trasformazione generale nel caso di rototraslazione fra terne.

$$v_{i+1} = v_i + \omega_i \wedge p_{i+1} + \dot{d}_{i+1}\hat{z}_i \qquad {}^{i+1}v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}v_i + {}^{i}\omega_i \wedge {}^{i}p_{i+1} + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i}\hat{z}_i\right).$$

Questo metodo è facilmente implementabile su calcolatore e viene detto algoritmo di Luh-Walker-Paul.

CINEMATICA DIFFERENZIALE CON MATRICE JACOBIANA.

Il metodo di Luh-Walker-Paul è orientato all'analisi cinematica diretta ed essendo sequenziale si può applicare facilmente solo ai robot seriali.

Un metodo più generale si ottiene differenziando la trasformazione non lineare $X = \phi(Q)$ che descrive la cinematica diretta.

Si ha infatti $dX = \frac{\partial\phi}{\partial Q}dQ$ da cui dividendo tutto per dt si ottiene

$\dot{X} = \frac{\partial\phi}{\partial Q}\dot{Q}$ e definendo lo jacobiano $J(Q) = \frac{\partial\phi}{\partial Q}$ si ha una relazione che, una volta nota le velocità dei giunti $\dot{Q}$ restituisce immediatamente la velocità della terna finale:

$$\boxed{\dot{X} = J(Q)\dot{Q}}$$

Per velocità dell'end effector possiamo intendere sia il vettore $\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}$ in cui sono rappresentate velocità lineare ed angolare della ultima terna, sia $\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}$ in cui la velocità di rotazione è espressa in termini delle derivate degli angoli minimi di rappresentazione per l'orientamento.

Nel primo caso lo jacobiano viene detto **geometrico**, nel secondo si dice **analitico** perché viene ricavato per derivazione analitica delle equazioni di posizione.

Anche l'espressione dello jacobiano varia in base al sistema di riferimento considerato e la sua legge di trasformazione è

$${}^{A}J(Q) = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}R & 0 \\ 0 & {}^{A}_{B}R \end{bmatrix} {}^{B}J(Q)$$