E' fondamentale notare che, nonostante la relazione fra x e q sia non lineare, quella fra $\dot{x}$ e $\dot{q}$ è lineare e, se lo jacobiano è invertibile, lo è anche quella fra $\dot{q}$ e $\dot{x}$

Ovviamente non ha senso parlare di inversione di $J(q)$ quando questa non è quadrata; questo capita quando non si ha identità fra:

- numero di righe = dimens. spazio di lavoro
- numero di colonne = numero di assi del robot

CALCOLO DELLO JACOBIANO GEOMETRICO

Nello jacobiano geometrico che lega $\dot{p}=\begin{bmatrix}\dot{x}_e\\ \omega_e\end{bmatrix}$ alle n velocità dei giunti $\dot{q}=\begin{bmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix}$ le singole colonne rappresentano il contributo alla velocità generato dai singoli giunti.

Partizionando infatti lo jacobiano come $J=\begin{bmatrix}J_1 & \dots & J_n\end{bmatrix}$ si ha che

$\dot{p}=J\dot{q}=J_1\dot{q}_1+\dots+J_n\dot{q}_n$ guardando alle righe di questa equazione vettoriale, possiamo scomporla in due ulteriori equazioni:

1) una per la velocità lineare
$\dot{x}_e=v_e=J_{e1}\dot{q}_1+\dots+J_{en}\dot{q}_n$

2) un'altra per la velocità angolare
$\omega_e=J_{\omega 1}\dot{q}_1+\dots+J_{\omega n}\dot{q}_n$

in entrambe i vettori J_{ei} e $J_{\omega i}$ si ottengono dalla seguente partizione dello jacobiano

$$J=\underbrace{\begin{bmatrix}J_{e1} & J_{ei} & J_{en}\\ J_{\omega 1} & J_{\omega i} & J_{\omega n}\end{bmatrix}}_{n}\begin{matrix}\updownarrow 3\\ \updownarrow 3\end{matrix}$$

E' il calcolo di questi vettori che permette di ottenere lo jacobiano geometrico, perché:

A) se il giunto i è prismatico allora $J_i=\begin{bmatrix}J_{ei}\\ J_{\omega i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{z}_{i-1}\\ 0\end{bmatrix}$

infatti il contributo i-esimo alla velocità lineare è nella stessa direzione dell'asse del giunto i, che ricordiamo coincidere con $\hat{z}_{i-1}$ per Denavit-Hartenberg:

$v_e=\dots+J_{ei}\dot{q}_i+\dots=\dots+\hat{z}_{i-1}\dot{d}_i+\dots$

non si ha contributo alla velocità angolare.

B) se il giunto i è rotoidale, allora $J_i=\begin{bmatrix}J_{ei}\\ J_{\omega i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{z}_{i-1}\wedge \bar{r}_{i-1,e}\\ \hat{z}_{i-1}\end{bmatrix}$ (*)

dove $\bar{r}_{i-1,e}$ è il vettore posizione dell'origine della terna solidale all'end-effector rispetto alla terna $i-1$: espresso nelle coordinate della terna fissa (in essa vogliamo che sia espresso lo jacobiano) è quindi

${}^0r_{i-1,e}={}^0r_e-{}^0r_{i-1}$ ovvero in coordinate omogenee

$${}^0x_{i-1,e}={}^0x_e-{}^0x_{i-1}=\underbrace{{}^0_1T(q_1)\dots{}^{n-1}_{n}T(q_n)\,{}^nO_n}_{\text{origine terna n rispetto terna 0}}-\underbrace{{}^0_1T(q_1)\dots{}^{i-2}_{i-1}T\,{}^{i-1}O_{i-1}}_{\text{origine i-1 rispetto terna fissa}}$$

ovviamente l'origine di un sistema rispetto alla terna stessa è $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ovvero in coordinate omogenee $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

Allo stesso modo $\hat{z}_{i-1}$ si esprime nella terna fissa come:

$\dots\,{}^{i-2}T(q_{i-1})\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ essendo ${}^{i-1}\hat{z}_{i-1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

CINEMATICA DIFFERENZIALE DIRETTA PER DERIVAZIONE DELLE MATRICI DI DENAVIT-HARTENBERG

Un terzo possibile approccio all'analisi di velocità, ma valido solo per il problema diretto, consiste nel derivare le matrici di trasformazione omogenea di Denavit-Hartenberg per pervenire alla derivata della matrice complessiva

$$\dot{T} = \left[\begin{array}{c|c} \dot{R} & \dot{x} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

da cui si ottiene la velocità lineare del terminale in modo immediato e la velocità angolare estrapolandola dalla derivata della sottomatrice di rotazione.

Dalla regola di derivazione del prodotto si ha che

$$\dot{T} = \frac{d}{dt}\left[{}^0_nT\right] = \frac{d}{dt}\left[{}^0_1T(q_1)\,{}^1_2T(q_2)\cdots{}^{n-1}_nT(q_n)\right] = \frac{d\,{}^0_1T}{dq_1}\dot{q}_1\,{}^1_2T\cdots{}^{n-1}_nT + {}^0_1T\frac{d\,{}^1_2T}{dq_2}\dot{q}_2\,{}^2_3T\cdots{}^{n-1}_nT + \dots + {}^0_1T\,{}^1_2T\cdots{}^{n-2}_{n-1}T\,\frac{d\,{}^{n-1}_nT}{dq_n}\dot{q}_n$$

La complessità di tale espressione è legata alla presenza di molti elementi nulli nelle derivate delle matrici di Denavit-Hartenberg; infatti:

1) se il giunto è prismatico

$$\frac{d\,{}^{i-1}_iT(q_i)}{dq_i} = \frac{d\,{}^{i-1}_iT(d_i)}{dd_i} = \left[\begin{array}{c|c} [0] & \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

2) se il giunto è rotoidale

$$\frac{d\,{}^{i-1}_iT(q_i)}{dq_i} = \left[\begin{array}{ccc|c} -s\vartheta_i & -c\vartheta_i c\alpha_i & c\vartheta_i s\alpha_i & -a_i s\vartheta_i \\ c\vartheta_i & -s\vartheta_i c\alpha_i & s\vartheta_i s\alpha_i & a_i c\vartheta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ANALISI INVERSA DI VELOCITÀ

Tutte le volte che è possibile invertire lo jacobiano, le velocità ai giunti si ottengono semplicemente come

$$\dot{q} = J(q)^{-1}\dot{x}$$

I casi in cui non è possibile invertire lo jacobiano sono due

1) quando $J(q)$ è singolare; i punti per cui ciò accade vengono detti **singolarità cinematiche** ed in essi:

   A) non è possibile imporre leggi di moto qualsiasi perché esiste una direzione lungo la quale è impossibile muoversi

   B) il problema cinematico inverso può ammettere infinite soluzioni

   C) nell'intorno di una singolarità sono necessarie velocità molto elevate nello spazio dei giunti per ottenere velocità anche modeste nello spazio di lavoro.

per questi motivi sono tollerate le singolarità di confine dello spazio di lavoro, mentre sarebbero da evitare quelle interne ad esso.

2) matrice jacobiana non quadrata, come nel caso di **robot ridondanti** $(n > m)$; in tal caso esistono infinite velocità $\dot{q}$ che soddisfano la relazione $\dot{x} = J(q)\dot{q}$: fra queste si sceglie quella che minimizza una funzione di costo $G(\dot{q}) = \dot{q}^T W \dot{q}$

W è una matrice di pesi $n \times n$ simmetrica e definita positiva definita in base all'importanza che diamo al moto di un motore rispetto ad un altro.

Se non attribuiamo preferenze si impone $W = I$ e la soluzione ottima è $\dot{q} = J^{\#}\dot{x}$ dove $J^{\#} = J^T(JJ^T)^{-1}$ viene detta pseudo-inversa dello jacobiano