DEFINIZIONE di SISTEMA DINAMICO

Un sistema dinamico Σ è un oggetto definito dai seguenti dati

a) un insieme ordinato dei tempi T

b) un insieme di ingresso U e un insieme di funzioni di ingresso Ω ammissibili definite da T in U
$[u(\cdot) \in \Omega \Rightarrow u(\cdot): T \to U]$

c) un insieme di uscita Y e un insieme di funzioni di uscita Γ definite da T in Y $[y(\cdot) \in \Gamma \Rightarrow y(\cdot): T \to Y]$

d) un insieme di stato X

e) una funzione di transizione di stato $\varphi: T \times T \times U \times X \to X$
$(\varphi(t, \tau, x(\tau), u(\cdot)) = x(t))$

f) una funzione trasformazione di uscita η
$\eta: T \times X \times U \to Y$ $\quad (\eta(t, x(t), u(t)) = y(t))$

Per convenzione indicheremo il sistema con
$\Sigma = (T, U, X, Y, \varphi, \eta)$ Di solito però il nostro insieme T sarà

$\mathbb{R}$ sistemi a tempo continuo
$\mathbb{Z}$ sistemi a tempo discreto

quando quindi sia certo con quale dei due tipi di insieme stiamo lavorando scriveremo che $\Sigma = (U, X, Y, \varphi, \eta)$

Interpretazione della funzione transizione di stato e 4 assiomi

$$x(t) = \varphi(t, \tau, x(\tau), u(\cdot))$$

Lo stato del sistema nell'istante t è funzione:
- di un istante τ (antecedente a t ovviamente) in cui ho iniziato lo studio
- dello stato nell'istante τ
- della funzione di ingresso che forniamo al sistema.

x questo motivo abbiamo scritto $u(\cdot)$, volendo indicare la funzione in Ω e non $u(t)$ con cui intenderemmo il valore in U assunto dalla funzione al tempo t

Per poter affermare che, una volta noto lo stato in un certo istante è possibile rideterminarlo in un istante successivo per di conoscere la funzione di ingresso limitatamente all'intervallo di tempo in esame, dobbiamo affiancare al punto a) i seguenti assiomi

1) **IRREVERSIBILITÀ** φ è definita $\forall t \geq \tau$

2) **CONSISTENZA** $\varphi(t, t, x(t), u(\cdot)) = x(t) \quad \forall (t, x, u(\cdot)) \in T \times X \times \Omega$

3) **COMPOSIZIONE** $\varphi(t_3, t_2, \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(\cdot)), u(\cdot)) = \varphi(t_3, t_1, x(t_1), u(\cdot))$

$\forall (x, u(\cdot)) \in X \times \Omega$ e
$t_3, t_2, t_1 \in T : t_3 > t_2 > t_1$.

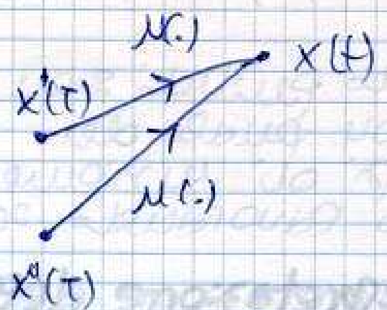
4) **CAUSALITÀ** $u'_{[\tau,t)}(\cdot) = u''_{[\tau,t)}(\cdot) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(t, \tau, x(\tau), u'_{[\tau,t)}(\cdot)) = \varphi(t, \tau, x(\tau), u''_{[\tau,t)}(\cdot)) \quad \forall (t, \tau, x) \in T \times T \times X$$

L'assioma 1 suppone che lo stato sia univocamente determinato, noti τ, $x(\tau)$, $u(\cdot)$, in ogni istante successivo a τ nell'insieme dei tempi.

Questo non significa che φ non possa essere definita anche per $t < \tau$. In questo caso possiamo conoscere lo stato anche precedentemente a τ e diciamo che il sistema è reversibile.

In caso contrario dobbiamo limitarci allo studio per $t \geq \tau$ e diciamo che il sistema è irreversibile.



Mentre la consistenza è una richiesta di tipo logico-formale la causalità serve a garantire che il nostro modello sia effettivamente la descrizione di un ente fisico reale, che è sempre causale.

La composizione ci dice infine che possiamo conoscere lo stato $x(t_3)$ conoscendo $u(\cdot)$ e $x(t_1)$ sia sostituendo in φ rispettivamente t_1, $x(t_1)$ e $u_{[t_1,t_3)}(\cdot)$ sia calcolando $x(t_2)$ mediante $\varphi(t_2, t_1, x(t_1), u_{[t_1,t_2)}(\cdot))$ e successivamente calcolando $\varphi(t_3, t_2, x(t_2), u_{[t_2,t_3)}(\cdot))$.

La proprietà di composizione concorda perfettamente con l'idea di stato di cui avevamo parlato prima della definizione formale:

tutta l'informazione che influisce sulla storia del sistema in $[t_1, t_2)$ necessaria per conoscere l'uscita viene condensata in $x(t_2)$, con notevole vantaggio dal punto di vista della