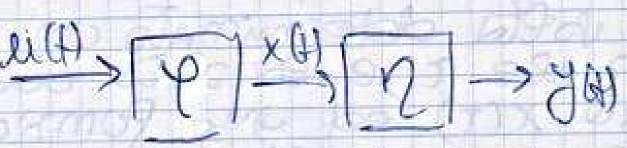
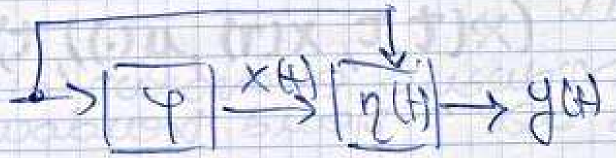
quantità di informazione che "ci portiamo dietro".
Se poi stiamo trattando sistemi reversibili la proprietà è nulla, in quanto conoscendo $x(t_2)$ e $u[t_1,t_2)$ possiamo univocamente risalire della storia del nostro sistema.

Per quanto riguarda la causalità va fatta una osservazione relativamente alla seguente classificazione:

Un sistema si dice proprio (o puramente dinamico) se in η non compare $u(t)$.



Un sistema si dice improprio se $y(t)$ dipende anche da $u(t)$ [$y(t) = \eta(x(t), u(t))$]



Nell'assioma di causalità, infatti, abbiamo chiesto che $x(t)$ dipenda (oltre che da $x(\tau)$) da $u[\tau,t)$ con t escluso ovvero che $x(t)$ non dipenda da $u(\cdot)$ all'istante stesso;

Se quindi $y(t) = \eta(x(t))$ l'uscita nell'istante t non dipende in alcun modo dal valore dell'ingresso nello stesso istante.

Poiché avevamo imposto gli assiomi proprio x far rispettare al nostro modello opportune proprietà dei sistemi reali, in quest'ottica dovremo considerare solo sistemi propri in quanto non è fisicamente possibile che una causa [$u(t)$] si tramuti istantaneamente in un effetto [$y(t)$]

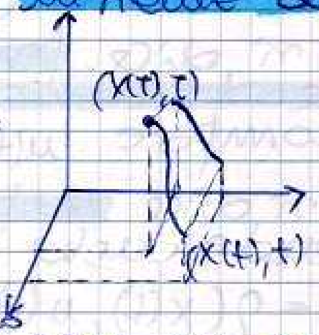
Per questo dovremo aver ben chiaro tale concetto quando ci troveremo a lavorare con sistemi impropri.

Diciamo infine che, una volta fissati U, T, Y ogni sistema è individuato dalla terna (X, η, φ) che prende il nome di rappresentazione nello spazio degli stati del nostro sistema.

INSIEME degli EVENTI, MOVIMENTO, TRAIETTORIA ed EQUILIBRIO

La coppia $(x(t),t)$ [che vedremo, nel caso in cui X sia uno spazio vettoriale ed n sia la sua dimensione, è un vettore con n+1 coordinate] prende il nome di **evento**.

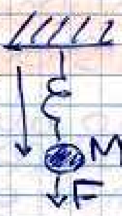
Pertanto $X \times T$ prende il nome di **insieme degli eventi**.



Una volta determinato un istante iniziale τ, lo stato corrispondente $x(\tau)$ ed una funzione di ingresso $u(\cdot)$, l'insieme degli eventi $(\varphi(t,\tau,x(\tau),u(\cdot)),t)$ che individuano l'evoluzione dello stato del sistema prendono il nome di **movimento**.

Il movimento è pertanto il grafo della funzione di t $\varphi(\cdot,\tau,x(\tau),u(\cdot))$ e **la sua proiezione nello spazio di stato prende il nome di traiettoria**. La traiettoria è pertanto l'immagine della funzione detta, ovvero i valori assunti da $\varphi(t,\tau,x(\tau),u(\cdot))$ al variare di t.

In figura sono rappresentati movimento e traiettoria per il sistema massa-molla.



$u=F$

$y=l$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{l} \\ l \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{F(t)}{M} - K\frac{x_2(t)}{M} \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Essendo lo spazio degli eventi bidimensionale tale esempio si presta ancora a rappresentazioni grafiche di movimento e traiettoria e risulta pertanto importante per intuire il significato delle seguenti definizioni:

Uno stato x si dice **punto di equilibrio in tempo finito** se $\forall t_1,t_2 \in T\ \exists u(\cdot) \in \Omega$ t.c.

$$\varphi(t,t_1,x,u(\cdot)) = x \quad \forall t \in [t_1,t_2]$$

Un **punto di equilibrio in tempo infinito** è invece uno stato $x \in X$ per cui $\forall \tau \in T\ \exists u(\cdot) \in \Omega$ t.c.

$$\varphi(t,\tau,x,u(\cdot)) = x \quad \forall t > \tau$$

È evidente quindi che **si ha un punto di equilibrio quando la traiettoria è rappresentata dal punto stesso.** (una volta trovata la $u(\cdot)$ opportuna)

Informalmente diciamo che uno stato x è di equilibrio quando possiamo agire sull'ingresso in modo che partendo dallo stato iniziale x si rimanga indefinitamente in x.

Capiamo quindi come per il sistema massa-molla un possibile stato di equilibrio è

$x_1=0,\ x_2=l$ con $u(\cdot)=Kl$